RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota VIII del Corrisp. Q. Majorana.

Computo dell'effetto corretto. — La diminuzione di peso della sfera di piombo, causata dalla presenza del mercurio, viene così corretta, tenendo conto di quanto è stato detto nella Nota precedente:

Variazione di peso constatata	— mg.	0,00209 ± 0,00007
Effetto del mercurio in U sulla tara . .	+ »	0,00085
Effetto del mercurio nei serbatoi, sulle sfere	— »	0,00007
Effetto del galleggiante e del contrappeso .	+ »	0,00035
Effetto del mercurio sul giogo	»	0,00000
Correzione per lo spostamento dello zero .	— »	0,00001
Errore massimo ammissibile per dissimmetrie		± 0,00009
Effetto netto . . .	— mg.	0,00097 ± 0,00016

Si ha dunque una netta diminuzione di peso. Ho esagerato nel computo dell'errore possibile, sommando all'errore probabile delle osservazioni (0,00007) l'errore massimo ammissibile per dissimmetrie, perchè non ho avuto modo di determinare l'errore probabile anche per tale fatto, ma solo di stabilire un limite massimo, certamente non raggiungibile.

Siccome la sfera di piombo ha una massa di 1274 grammi, la diminuzione di peso specifica, cioè per unità di massa, è di

$$\frac{0,00000097}{1274}\ 7,7 \,.\, 10^{-10}.$$

Quale dissimmetria potrebbe giustificare l'effetto? — La dissimmetria di massa è la causa a cui più facilmente si pensa, volendo spiegare, senza ipotesi nuove, la constatata apparente azione di schermo che il mercurio esplica sulla gravità. È stato calcolato quale influenza può avere la dissimmetria dell'apparecchio riconosciuta ammissibile; e si è visto che essa non può coprire l'effetto se non in piccola parte. Reciprocamente ci si può domandare, di quanto dovrebbe essere più vicino al centro della sfera di piombo uno dei due livelli di mercurio rispetto all'altro, perchè sia giustificato il trovato effetto. Siccome si è detto che 1 mm. di dissimmetria produce uno squilibrio di mg. 0,00021, si vede che, per produrne uno di 0,00097, occorrerebbero circa cinque millimetri, la qual cosa non può assolutamente essersi verificata nella mia disposizione.

Possibilità di altre cause di errore. — Quelle, tra le varie cause di errore, che possono influire sensibilmente sul valore dell'effetto trovato, sono già state da me esaminate. Ma trattandosi di un fenomeno completamente nuovo, che anzi modificherebbe una delle leggi fondamentali della fisica, è naturale che, prima di ammetterlo, si pensi minutamente a tutte le circostanze che possono falsare una determinazione del genere. Si comprende anzitutto che, nella ricerca di tali cause di errore, occorre aver riguardo ai fenomeni che possono manifestarsi ciclicamente, nel corso delle osservazioni: cioè in accordo col ciclo delle varie operazioni che si compiono. Così, non è da prendersi in considerazione, p. es., lo stato più o meno igroscopico dell'aria nella bilancia, le variazioni di temperatura di questa (dovute od alle lampade di proiezione od all'ambiente), le scosse meccaniche accidentali, ecc.; in quanto che queste cause perturbatrici, pur esistendo certamente, hanno leggi di variazione proprie che, con estrema probabilità, direi quasi certezza, non possono coincidere col periodo ciclico dell'entrata e dell'uscita del mercurio nel recipiente U. Ciò posto, passerò in rivista le altre cause sospettabili.

Perturbazioni meccaniche. — La varia posizione del mercurio, sia cioè nel recipiente U, sia nei sei serbatoi, potrebbe influenzare, per deformazione delle varie parti della disposizione (recipienti, pavimento, muro, mensola, tavoli, bilancia, lampade di proiezione, ecc.), la posizione di riposo della bilancia. Ma controlli preventivi mi hanno fatto vedere che certamente, se un'influenza del genere esiste, essa è inferiore al limite di precisione delle letture, e cioè ad $^1/_{10}$ di millimetro della scala verticale, a 12 metri dalla bilancia. D'altronde questa causa, che in certo modo mi aveva indotto in errore una volta, porterebbe ad un effetto di segno contrario al trovato. Infatti, la bilancia dovrebbe, se mai, più facilmente abbassarsi, per l'afflusso del mercurio in U, piuttosto che alzarsi.

Per quanto riguarda gli effetti newtoniani, i più importanti sono stati segnalati e valutati. Potrebbesi, peraltro, pensare ad un effetto dovuto a

deformazioni del recipiente U, sotto il peso del mercurio, oppure ad accrescimento della densità di questo per compressibilità nelle parti più profonde. È facile il vedere che tali effetti sono di ordine assai piccolo e trascurabile; in ogni caso, poi, essi farebbero apparire la sfera di piombo *più pesante*, per la presenza del mercurio, e non più leggera, in conseguenza della maggiore massa di questo, accumulantesi al disotto di essa. Aggiungo inoltre che le deformazioni dell'ordine di $^1/_{10}$ di mm. delle pareti del recipiente, per la presenza del mercurio, non influiscono sui livelli di questo: infatti, tali livelli sono controllati al catetometro, e durante il controllo le deformazioni esistono già. Inoltre, la posizione di questo strumento, assai discosto dalla bilancia, non è menomamente influenzata da quella del mercurio.

Perturbazioni calorifiche. — Esse sono completamente evitate. Nessuna azione può avere la posizione del mercurio, sia sulle temperature dei due bracci della bilancia, sia sulla spinta delle sfere m ed m'. Infatti la bilancia è completamente protetta, ed il mercurio si muove dentro recipienti discosti dal giogo; la temperatura di questo liquido può al più differire di circa $^1/_{10}$ di grado da quella del giogo: e non è a credere che tale squilibrio di temperatura possa, anche in misura ridottissima, trasmettersi al giogo, nei 6 minuti necessarii per ogni serie di osservazioni. Variazioni di spinta, dovute a perturbazioni termometriche, non sono da temersi (come si vide a suo tempo), in conseguenza della notevole rarefazione dell'aria.

Azioni radiometriche, — Potrebbero aver luogo nell'interno di V′; ma certamente il loro effetto è trascurabilissimo, data la assai piccola differenza di temperatura ammissibile tra piombo e mercurio. A parte il fatto che tali differenze di temperatura dovrebbero esercitare la loro azione in conseguenza del loro passaggio da V allo strato di aria fra V e V′, rimanendo così di molto affievolite, esse, per ragioni di simmetria, darebbero alla sfera un impulso risultante nullo. Benchè non serva, si rileva, peraltro, che le pareti di V′ sono nichelate e splendenti, e quindi hanno potere emissivo relativamente basso.

Azioni elettrostatiche. — Gli involucri V′ e V, la custodia della bilancia, l'albero di sostegno del giogo, la massa di mercurio ecc., sono connessi metallicamente e posti al suolo. Può avvenire che il giogo e la sfera m, isolati elettricamente su i piani di agata del coltello centrale e di quello di destra, assumano cariche elettriche accidentali, dopo essere stata abbassata la forchetta di sostegno. Ma è assolutamente da escludersi che a traverso i due involucri metallici V e V′, posti, come si è detto, al suolo, una qualsiasi forza ponderomotrice si sviluppi per la presenza o per la assenza del mercurio. Certamente esisteranno, anche in assenza di quelle cariche accidentali, delle forze dovute alla attrazione fra metalli eterogenei (piombo e nichel), nell'interno di V′ (1); ma se anche esse non si annullassero per

(1) Vedi mio lavoro: Rendiconti Accademia dei Lincei, 5, VIII, pag. 303, an. 1899.

ragioni di simmetria, sarebbero in ogni modo costanti e non influenzabili dalla presenza o dall'assenza esteriore del mercurio.

Azioni magnetiche. — Più difficile è lo studio delle eventuali azioni magnetiche. Si sa anzitutto, che tanto il mercurio quanto il piombo sono diamagnetici: il primo molto più del secondo. Nessun dubbio quindi che in conformità si comporti il mercurio del recipiente U. Potendosi dubitare invece che il piombo della sfera *m* contenesse qualche accidentale impurità di ferro, mi sono assicurato delle sue proprietà diamagnetiche, ponendo questa sfera

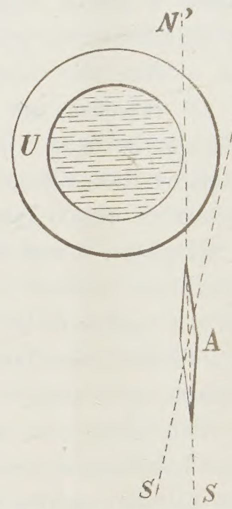

Fig. 8.

fra le espansioni di un elettromagnete, dopo averla fissata ed equilibrata al giogo di una grossolana bilancia; essa, in conseguenza della non uniformità del campo, appariva, se mai, respinta, e certamente non attratta.

Ora, in conseguenza del diamagnetismo del mercurio, il campo magnetico terrestre, in cui si trovano immerse la sfera *m* e la bilancia, viene certamente perturbato alquanto. La esperienza seguente stabilisce in certo modo la misura del fenomeno.

Pongo in vicinanza del recipiente U, nel quale si fa affluire il mercurio, un ago magnetico orizzontale lungo 10 cm., A, sospeso ad un filo di bozzolo, e fornito di specchio per l'osservazione su scala (fig. 8). La sua posizione rispetto ad U si fa variare a volontà. Se la distanza UA è di circa 25 cm., tenendo l'ago in guisa che esso, libero di oscillare, sia all'incirca tangente, colla sua direzione, alla massa del mercurio, si trova che per l'afflusso di questo, l'ago devia alquanto, come se fosse respinto dal mercurio. Su di una scala a m. 5,80 di distanza, un raggio luminoso riflesso

dallo specchio di A si sposta di 57 mm. circa. Ciò corrisponde ad una deviazione vera dell'ago, di un angolo metà: cioè

$$\frac{28{,}5}{2\pi\,.\,5800}\,21600 = 17' \text{ circa.}$$

Tale deviazione diminuisce rapidamente man mano che l'ago A si allontana da U, pur mantenendosi questo sempre sulla sua primitiva direzione; ad un metro di distanza, essa è ridotta a meno di 10″. La posizione dell'ago A sta, in ogni punto, ad indicare la direzione della componente orizzontale del magnetismo terrestre; la quale perciò resta alquanto perturbata per la presenza del mercurio, nelle immediate vicinanze di questo, e assai meno già ad un metro di distanza.

Ora, vi sono varie possibilità di azione del mercurio sull'equilibrio della bilancia. Potrebbe la parte di ottone del giogo, comportarsi analogamente ad un ago magnetico di inclinazione, e seguire, così, in certo modo, le variazioni delle linee di forza del campo magnetico terrestre. Alla distanza che intercede fra giogo ed il recipiente di mercurio, si è visto che esse sono dell'ordine di 10″: ciò darebbe sulla scala a 12 metri, una deviazione del raggio luminoso, di circa mm. 1,2. Ora, non è facile il dire se il giogo si debba comportare come un corpo para- o diamagnetico. Ma comunque, esso potrà subire debolmente le variazioni di direzione delle linee di forza del campo, col tendere a disporsi secondo esse, oppure normalmente. Certamente però tale tendenza sarà occasionata, in qualunque caso, da forze di un ordine di grandezza enormemente più piccolo che non per quelle che solleciterebbero un ago magnetico. Per cui, a parte il fatto che il giogo offre, per la sua stabilità di equilibrio, una reazione alle forze che lo deviano (il che non succederebbe per un ago magnetico), la deviazione possibile sulla scala, se ve ne ha una, deve essere enormemente più piccola di mm. 1,2, e quindi del tutto trascurabile.

Il ragionamento precedente si riferisce all'ipotesi (del resto giustificata) che il giogo sia debolmente diamagnetico, come del resto sono le leghe di rame, stagno e piombo; e non ho tenuto conto della presenza dei coltelli, che sono d'acciaio, ma di dimensioni assai ridotte. Un'azione su di essi sarebbe spiegabile, se già nello spazio da essi occupato il campo magnetico terrestre potesse diventare non uniforme, sotto l'azione della presenza del mercurio. Potrebbe in tal caso manifestarsi una sorta di attrazione o repulsione; ma tale fatto non sembra poter intervenire in misura, anche lontanamente sensibile.

Piuttosto, può esistere un'azione sull'indice di acciaio verticale, portato dal giogo e che arriva sino alla scala H (vedi fig. 5). Esso è lungo 398 mm.; dal coltello centrale sino a 15 cm. più in basso, ha un diametro di 4,8 mm., poi si assottiglia sino a zero prima di arrivare in H. Se tale ago fosse ma-

gnetizzato, esso farebbe diventare la bilancia una specie di bussola di inclinazione magnetica, nella quale, peraltro, l'equilibrio sarebbe stabilito tra il momento magnetico ed il momento impresso dalla gravità. Supponiamo che questo non esista e che effettivamente solo il primo determini la posizione di equilibrio del giogo. Dall'esame della fig. 5 si rileva che si sarà così realizzata una disposizione analoga (ma in un piano verticale) a quella della fig. 8: cioè, serbatoio di mercurio ed ago magnetico situato lateralmente. L'arrivo del mercurio, in conseguenza del diamagnetismo di questo, farebbe deviare verso la sinistra la punta bassa dell'ago; per cui la sfera di piombo *m* si abbasserebbe. L'effetto sarebbe dunque contrario al constatato.

Ma le forze in giuoco sono più complesse; tutto fa però credere che, se pur l'effetto esiste, sarebbe sempre più piccolo di quello che subirebbe un ago libero, e, in ogni caso, di segno contrario a quello che si trova. È da notare che l'ago H non è sensibilmente magnetizzato, salvo una lievissima traccia dovuta a magnetismo indotto del campo terrestre; è infatti, in opportune condizioni, debolmente respinto da un polo magnetico nord. Alle sue proprietà magnetiche, non si può dunque ascrivere l'effetto constatato.

Rimane ora da vedere se non vi possa essere un'azione magnetica del mercurio, sulla palla di piombo. Ora, data la uniformità del campo terrestre nello spazio occupato dal mio apparecchio, sarebbe senza altro da escludersi tale azione. Infatti, se il mercurio dirada le linee di forza magnetica nella località occupata dalla massa *m*, non vi è ragione alcuna che da tale fatto derivi una forza ponderomotrice, diretta proprio verso l'alto, come è stato trovato. Per ragioni di simmetria, tutto dovrebbe rimanere in equilibrio.

Ma pure, una forza potrebbe manifestarsi se il campo non fosse uniforme. Ora, effettivamente, può darsi che una lieve inuniformità sia generata dai tre piedi di ferro del vaso U (vedi fig. 5). Quando fu costruito l'apparecchio, non pensai a tale eventualità; ma, come vedremo, la cosa non può avere conseguenze dannose. Ammettiamo che, in conseguenza della presenza di quel ferro, il campo sia lievemente più intenso in *m*, e che la sua intensità vada decrescendo verso l'alto. Il piombo di *m*, essendo diamagnetico, assume una certa posizione di equilibrio, un po' più alta, perchè respinto verso le località di campo più debole. Facciamo affluire il mercurio, in conseguenza del diamagnetismo di questo metallo, l'intensità del campo in cui si trova immersa la sfera *m*, non può che diminuire e la sfera di piombo si deve necessariamente abbassare. Neanche dunque a questo fenomeno può ascriversi il constatato fenomeno.

Un'altra esperienza che serve altresì ad indicare la assenza di perturbazioni di natura magnetica, è la seguente: in prossimità del vaso U, ed in posizioni diverse da caso a caso, sono stati collocati quattro magneti, pesanti ciascuno 20 grammi, e lunghi 10 cm. Essi perturbano il campo magnetico locale certamente assai più di quanto non lo faccia il mercurio; ma,

ciò malgrado, la loro azione sulla posizione di equilibrio della bilancia è del tutto inapprezzabile. Solo accrescendo sino a qualche chilogrammo la massa degli aghi magnetizzati si arriva a far deviare di qualche millimetro l'indice luminoso: questo risultato è stato propriamente ottenuto con un grosso fascio lungo 24 cm., composto di 6 sbarre del peso complessivo di kg. 2,100. Si comprende dunque che la perturbazione magnetica, che occasiona questo spostamento, è enorme di fronte a quella che può essere generata dal mercurio.

Azioni elettromagnetiche. — Un'altra causa di errore potrebbe sospettarsi: azioni elettromagnetiche occasionate da correnti vaganti nel sottosuolo. Potrebbe infatti darsi che tali correnti, essendo variabili, inducessero delle altre correnti sulla sfera *m*, donde la formazione di una forza ponderomotrice; tale forza sarebbe certamente modificata per la presenza del mercurio, venendosi così a constatare un falso effetto.

Ora, al riguardo di tale possibilità, si osserva che, se mai, l'azione dovrebbe essere stata, nelle eseguite esperienze, sensibilmente costante; e ciò nelle varie ore del giorno e della notte, come io ho constatato. Ciò appare, in ogni caso, poco probabile, giacchè le reti cittadine sono quasi inoperose nelle ore notturne. Altre ragioni, che per brevità non espongo, fanno del resto escludere l'intervento di tale fenomeno.

Comunque, ho voluto controllare la possibilità di un fatto simile, mediante il seguente esperimento: sotto al vaso U pongo un elettromagnete rettilineo, con nucleo di ferro verticale; le spire dell'avvolgimento sono dunque orizzontali, e l'asse dell'elettromagnete coincide con l'asse del vaso U, nel quale penetrano le sue linee di forza. Circondo il vaso U con una spirale di filo isolato, unito ad un telefono. Nell'elettromagnete circola una corrente alternata di frequenza solita (50 periodi), di cui si può regolare a volontà l'intensità. Per ottenere un suono percettibile al telefono, dovuto alla formazione di una corrente indotta, basta circa $^1/_2$ ampère nell'elettromagnete. Ma ciò non produce alcun cambiamento nella posizione dell'indice luminoso, tanto se in U vi sia, quanto se non vi sia il mercurio. Solo quando la corrente raggiunge 5 ampères circa, quell'indice si sposta per circa $^1/_2$ mm. sulla scala a 12 metri; ma lo spostamento non muta per l'immissione del mercurio. In queste condizioni, del resto, il telefono accusa una energica corrente indotta.

L'eseguito esperimento dimostra dunque che, in condizioni ordinarie, non vi è azione elettromagnetica sensibile che traversi la sfera di piombo; infatti, se ve ne fosse una, essa darebbe luogo ad una corrente indotta nel telefono (che certamente manca in ogni caso) prima di occasionare una forza ponderomotrice sulla sfera di piombo.

Tutto ciò vale per frequenze nell'ordine di 50 periodi a 1″; è inutile di pensare, ritengo, ad altre frequenze.

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica di una falda di una superficie mediante serie procedenti per le potenze fratte di due variabili.* Nota del dott OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. In una precedente Nota, intitolata *Sugli incroci delle curve di diramazione di una funzione algebrica di due variabili* (1), ho dimostrato che le due sostituzioni A e B, relative a due parti a e b della curva di diramazione per una funzione algebrica $z(xy)$ nell'intorno di un punto $P_0 = (x_0\, y_0)$, sono fra loro permutabili quando le a e b passino per P_0 semplicemente e senza contatto, A e B generando un gruppo abeliano G.

In questa Nota mi propongo di esaminare più precisamente la struttura di tale gruppo, e dedurne la rappresentazione analitica, mediante serie, della funzione algebrica $z(xy)$.

E conviene esplicitamente osservare che, potendosi supporre gli assi orientati in modo generico, l'incrocio delle due curve di diramazione corrisponderà a un incrocio di due curve multiple della superficie, origine di falde superlineari, o a un punto di una curva multipla che sia base per il sistema delle curve staccate su essa dalle sue superficie polari.

2. Il gruppo generato dalle due sostituzioni A e B potrà, in generale, non essere transitivo: si ha per esempio questo caso quando il punto P_0 corrisponda ad una bitangente (propria od impropria) della superficie $f(xy) = 0$ parallela all'asse z; le due sostituzioni A e B vengono allora a corrispondere a due falde distinte della superficie, ed operano su due coppie distinte di valori di z

$$A = (z_1\, z_2) \quad , \quad B = (z_3\, z_4) \, .$$

Dunque, se il gruppo G generato dalle sostituzioni A e B non è transitivo, potremo distinguere tante falde della superficie [per il punto (xy) variabile nell'intorno di P_0] quanti sono i sistemi di transitività in cui si possono dividere le n determinazioni di z: *le due sostituzioni* A *e* B *saranno permutabili anche quando si considerino operare su un solo sistema di transitività.*

Si consideri ora una falda della superficie $f(xyz) = 0$, la quale abbia per origine il punto P di coordinate $(0\,0\,0)$; la falda sia di un certo ordine $r > 1$, e la funzione algebrica z, da essa definita nell'intorno del punto

(1) Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pag. 127.

$P_0 = (x = 0, y = 0)$, abbia una curva di diramazione la quale passi precisamente per il punto P_0 con due parti o rami lineari a e b a tangenti distinte. Le due sostituzioni A e B, relative ad a e b, saranno ora considerate operare solamente sulle r determinazioni di z, relative alla nostra falda, e il loro gruppo G risulterà transitivo.

Ci proponiamo qui di *esaminare quale possa essere il gruppo abeliano* G *generato dalle due sostituzioni permutabili* A *e* B; faremo vedere come esso sia univocamente determinato dai periodi μ e ν delle sostituzioni A e B, e dal numero r delle lettere su cui esse operano.

La sostituzione A si comporrà, in generale, di più cicli

$$A_1 , A_2 , A_3 , \dots A_\alpha ,$$

e potremo scrivere

$$A = A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha .$$

Siccome A è invariante nel gruppo transitivo G, essa opererà su tutte le r lettere, e i varî cicli $A_1 A_2 \dots A_\alpha$ conterranno un medesimo numero μ di elementi: avremo dunque $r = \alpha\mu$, e, distinguendo le r determinazioni di z con due indici, potremo scrivere

$$A = (z_{11}\, z_{12} \dots z_{1\mu})\,(z_{21}\, z_{22} \dots z_{2\mu}) \dots (z_{\alpha 1}\, z_{\alpha 2} \dots z_{\alpha\mu}) ,$$

essendo

$$\begin{aligned} A_1 &= (z_{11}\, z_{12} \dots z_{1\mu}) \\ A_2 &= (z_{21}\, z_{22} \dots z_{2\mu}) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A_\alpha &= (z_{\alpha 1}\, z_{\alpha 2} \dots z_{\alpha\mu}) . \end{aligned}$$

La sostituzione B deve lasciare invariata la A, ma non i singoli cicli, altrimenti G non sarebbe transitivo, e potremo supporre che essa porti A_1 in A_2, A_2 in $A_3 \dots A_\alpha$ in A_1: avremo così che B^α lascia fermi i cicli di A; ove B^α porti z_{11} in z_{1m+1}, sarà

$$B^\alpha = A^m ,$$

perchè l'operazione $A^{-m} B^\alpha$, lasciando fermo z_{11} ed essendo invariante nel gruppo transitivo G, deve lasciar ferme tutte le r determinazioni di z.

Essendo ν il periodo di B, sarà $h = \frac{\nu}{\alpha}$ il periodo di B^α, e quindi anche di A^m; il prodotto hm appare così in minimo multiplo comune di m e di μ, onde, indicando con δ il massimo comun divisore di m e μ, si ha

$$hm = \frac{m\mu}{\delta} \quad , \quad \delta = \frac{\mu}{h} .$$

Posto ora

$$k = \frac{m}{\delta},$$

k risulta primo con μ e quindi A^k genera tutto il gruppo ciclico generato dalla operazione A; essendo poi

$$m = k \frac{\mu}{h},$$

si ha

$$B^\alpha = (A^k)^{\frac{\mu}{h}}.$$

Ponendo $z'_{i1} = z_{i1}$, $z'_{i2} = z_{i,k+1}$, $z'_{i3} = z_{i,2k+1} \, . \, .$ $(i = 1, 2 \ldots \alpha)$ e indicando con A' la potenza k-esima di A, potremo scrivere

$$\begin{aligned} A' &= A^k = (z'_{11}\, z'_{12} \ldots z'_{1\mu})\,(z'_{21}\, z'_{22} \ldots z'_{2\mu}) \ldots (z'_{\alpha 1}\, z'_{\alpha 2} \ldots z'_{\alpha\mu}) \\ B^\alpha &= A'^\delta \\ B &= (z'_{1i}\, z'_{2i} \ldots z'_{\alpha i}\, z'_{1.\delta+i}\, z'_{2.\delta+i} \ldots z'_{\alpha, h\delta-\delta+i}) \\ A &= A'^p \end{aligned}$$

dove p è un numero primo con μ.

Essendo

$$r = \frac{\mu\nu}{h}, \quad \delta = \frac{\mu}{h}, \quad k = \frac{m}{\delta}, \quad kp \equiv 1 \pmod{\mu},$$

si ha che *il gruppo* G *è determinato dai tre valori di* μ, ν, h, e le operazioni A e B risultano in esso fissate ove si dia anche il numero m (potenza di A, cui è uguale B^α), il quale è definito, a meno di un fattore primo con μ, dalla circostanza che $\frac{\mu}{h}$ è il massimo comun divisore di μ ed m.

Se $h = 1$, risulta $\alpha = \nu$, A e B riescono indipendenti ed è

$$B = (z'_{1i}\, z'_{2i} \ldots z'_{\nu i})$$

essendo $\delta \equiv 0 \pmod{\mu}$.

3. Ciò posto, vediamo come si ottenga la *rappresentazione analitica della falda*, supponendo dapprima, per semplicità, che le due curve di diramazione a e b siano rispettivamente gli assi $x = 0$ e $y = 0$. Poniamo

$$x = u^\mu, \quad y = v^\nu;$$

allora la z appare funzione uniforme del punto (u, v) e quindi [1] si potrà sviluppare per le potenze di u e v

$$z = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k. \tag{1}$$

[1] Cfr. p. es. Picard, *Traité d'analyse*, Paris, 1893, tom. II, pag. 237.

Ma la funzione z, così scritta, appare una funzione del punto (xy) a $\nu\mu$ determinazioni, mentre la falda è di un ordine $r=\frac{\nu\mu}{h}$, sicchè, ove sia $h>1$, occorre che i coefficienti a_{ik} assumano valori particolari; inoltre il punto (uv) non riesce più funzione univoca del punto (xyz) della falda, ma funzione ad h determinazioni, la falda venendo così rappresentata non sul piano (uv) ma sopra un'involuzione di questo piano.

Sorge così il problema di determinare più esattamente il tipo dello sviluppo di z, in modo che la falda venga rappresentata biunivocamente su un piano.

Ciò riesce nel modo più semplice nel caso in cui $h=\nu$; allora si ha $\mu=r$, $\alpha=1$, sicchè B risulta una potenza di A: $B=A^m$.

In tale ipotesi si ponga

$$u^{\mu}=x\,y^m\ ,\ v=y\ ;$$

allora z, subendo le medesime sostituzioni che il punto (uv), appare funzione univoca (ed univocamente invertibile) di questo, e si ha uno sviluppo

$$z=\Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k\,,$$

che risulta un caso particolare di quello dato precedentemente

Più complessa riesce invece la rappresentazione nel caso di h qualunque. Si ponga

$$u=x^{\frac{1}{\mu}}\, y^{\frac{k}{\nu}}\quad,\quad v=y^{\frac{h}{\nu}}\ ;$$

essendo k ed h primi fra di loro, $m\frac{1}{\mu}=\frac{\alpha k}{\nu}$, si ha che il punto (uv) risulta funzione del punto (xy) ad $r=\frac{\nu\mu}{h}$ determinazioni: al girare del punto (xy) intorno ad $x=0$ e ad $y=0$, queste r determinazioni si permutano secondo due sostituzioni A e B di periodi μ e ν, e tali che

$$A^m=B^{\alpha}\,,$$

sicchè il punto (uv) ha lo stesso gruppo di monodromia che il punto (xyz) della nostra falda.

Pertanto si ha per z lo sviluppo in serie

$$z=\Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k\,,$$

e la falda viene rappresentata biunivocamente sul piano (uv) nell'intorno di $u=0$, $v=0$.

Più in generale, in luogo di porre

$$u = x^{\frac{1}{\mu}} y^{\frac{k}{\nu}} ,$$

si può porre

$$u = x^{\frac{1}{\mu}} y^{\frac{\lambda h + k}{\nu}} ,$$

con λ intero: nel caso $B = A^m$, preso $\lambda = 0$, si ha $u = x^{\frac{1}{\mu}} x^{\frac{m}{\mu}}$, $v = y$, come avevamo già trovato; invece nel caso in cui A e B riescano indipendenti ($h = 1$, $\alpha = \nu$, $m = \mu$) posto $\lambda = -1$, si ha $u = x^{\frac{1}{\mu}}$, $v = y^{\frac{1}{\nu}}$

Possiamo ora togliere l'ipotesi restrittiva che i rami a e b sieno gli assi $x = 0$ e $y = 0$; se tali rami sono dati rispettivamente da

$$y = \Sigma a_i x^i$$
$$y = \Sigma b_i y^i ,$$

ci si riduce al caso precedente mediante la trasformazione

$$x' = y - \Sigma a_i x^i$$
$$y' = y - \Sigma b_i y^i ,$$

regolare nell'intorno del punto $x = 0$, $y = 0$.

NOTA. — Conviene osservare l'analogia fra lo sviluppo di z, dato sopra nel caso $B = A^m$, con lo sviluppo di Halphen di una falda d'ordine μ di una superficie nell'intorno di un punto generico di una curva cuspidale: se l'asse $x = 0$ è una curva cuspidale d'ordine $r = \mu$, e il punto $x = y = z = 0$ è un punto generico di questa, lo sviluppo di Halphen dà

$$z = \Sigma \Sigma a_{ix} x^{\frac{i}{\mu}} y^k .$$

La ragione di tale analogia sta in ciò: che, se si eseguisce una trasformazione birazionale dello spazio (per es. una trasformazione monoidale) la cui curva fondamentale abbia un contatto m-punto con una curva cuspidale d'ordine r in un punto generico, P, di questa, si viene a creare un incrocio di due curve cuspidali (la vecchia curva cuspidale e una nuova sorgente dal punto P) cui corrisponde un incrocio di due curve di diramazione, che dà precisamente il caso in questione.

Lo sviluppo, invece, che si ottiene nel caso generale per $x^{\frac{1}{\mu}}$, $y^{\frac{1}{\nu}}$, rientra nel tipo degli sviluppi che Hensel credeva potersi dare per una falda qualunque di una superficie (al quale proposito cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. II, pag. 562; e più particolarmente B. Levi, Comptes Rendus, 17 marzo 1902).

Botanica. — *La flora del fossato di Palazzo Madama a Torino*. Memoria del Socio O. MATTIROLO.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità. II: Equazione del pelo libero*. Nota II [1] di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

5. Rappresenti [2]

$$y = 1 + \eta(t\,;x)$$

l'equazione del pelo libero l in un generico istante t, per cui $\eta = y - 1$ è in ogni punto di l il sopraelevamento sullo specchio imperturbato $y = 1$ (si rammenti [N. 1] che si è assunto $= 1$ la profondità del canale allo stato imperturbato). Ora è [3]

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{per } y = 1\,, \tag{6}$$

essendo φ il potenziale cinetico, ossia la parte reale di f.

Ricavando dalla (1) la parte reale e tenendo presente che φ_n rappresenta la parte reale di f_n, si ha

$$\varphi = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!}\varphi_n. \tag{7}$$

Per la (6), mettendo in particolare e separata evidenza i termini della serie contenenti le potenze pari di t da quelli dipendenti dalle potenze dispari, si ottiene

$$\eta = -\frac{1}{g}\left\{\sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\varphi_{2n+1} + \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi_{2n+2}\right\}, \text{ per } y = 1. \tag{8}$$

[1] Vedi la Nota I in questi Rendiconti, pag. 131.

[2] Cfr. la Nota *Equazione caratteristica* ecc., n. 1.

[3] Cfr. loco ultimo citato, formula (6).

6. Richiamo la (4)

$$\varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\log \operatorname{Cth}^2\frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 .$$

Integrando per parti, si può scrivere altresì

$$\varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x_1)\log \operatorname{Cth}^2\frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 . \tag{9}$$

Sia λ una generica funzione di x finita e continua al finito, e finita per $x = \pm\infty$, unitamente alle sue derivate; poniamo

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}[\lambda] = \dfrac{g}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(x_1)\log \operatorname{Cth}^2\frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 . \\ \mathrm{I}^2[\lambda] = \mathrm{I}[\mathrm{I}(\lambda)] \quad , \quad \mathrm{I}^3[\lambda] = \mathrm{I}[\mathrm{I}^2(\lambda)] \text{, ecc.} \end{array}\right. \tag{10}$$

Scende da queste che, per un r generico, è

$$\frac{d^r}{dx^r}\mathrm{I}[\lambda] = \mathrm{I}\left[\frac{d^r\lambda}{dx^r}\right]. \tag{11}$$

Convenendo che $\mathrm{I}^0[\lambda] = \lambda$, dalle (9) si deduce, tenendo conto delle (10-11),

$$\varphi_{2n} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\mathrm{I}^n[\varphi_0] \quad , \quad \varphi_{2n+1} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\mathrm{I}^n[\varphi_1],$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots);$$

per cui all'espressione (8) di η può sostituirsi la seguente:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left\{\sum_0^\infty{}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\mathrm{I}^n[\varphi_1] + \sum_0^\infty{}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}}\mathrm{I}^{n+1}[\varphi_0]\right\}. \tag{12}$$

In questa relazione viene messo in rilievo il modo di dipendenza della forma del pelo libero ad ogni istante dai valori di φ_0 e φ_1 per $y = 1$. — Risulta, dalla (7), che φ_0 è l'espressione di φ per $t = 0$ e φ_1 quella di $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ per $t = 0$; ne segue, per la (6), chiamando η_0 il sopraelevamento iniziale del polo imperturbato $y = 1$, che

$$\varphi_1 = -\eta_0 .$$

Per (10), si ha

$$\mathrm{I}^n[\varphi_1] = \mathrm{I}^n[-g\eta_0] = -g\,\mathrm{I}^n[\eta_0];$$

per cui la (12) può venire sostituita dalla seguente:

$$(13)\quad \eta = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0] - \frac{1}{g} \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} \mathrm{I}^{n+1}[\varphi_0].$$

Rimane ora da discutersi l'equiconvergenza delle due serie. Ci occuperemo della prima soltanto, dato il particolare interesse del problema ondoso che ad essa si riferisce. Le considerazioni ad essa relative sono però senz'altro applicabili anche all'altra serie.

7. Il problema di particolare interesse che ho accennato è quello delle onde di emersione. Essendo nulli gli impulsi iniziali, notoriamente deve essere $\varphi_0 = 0$; la (13) si riduce allora alla prima serie, cioè

$$(14)\qquad \eta = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0].$$

Mediante questa relazione, risulta definito il profilo dell'onda in qualunque istante (finito), quando sia noto il profilo iniziale (per $t = 0$).

8. Occupiamoci ora della convergenza della serie (14). Converrà a tal uopo seguire, fino ad un certo punto, il metodo della media aritmetica escogitato da Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet [1].

Si consideri l'integrale

$$\mathrm{I}[\eta_0] = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x_1) \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1,$$

e si noti che, se η_0 designa una qualsiasi funzione di x_1 finita e continua al finito e finita (o anche dotata di singolarità polare, comunque elevata) per $x_1 = \pm\infty$, $\mathrm{I}[\eta_0]$ è una funzione di x, finita e continua anche all'∞ [2]. Sieno M e m rispettivamente il massimo e il minimo di η_0, e si divida l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ in due parti α e β tali che: nella prima il valore di η_0 sia superiore a $\frac{\mathrm{M}+m}{2}$, nell'altra sia $\eta_0 \leq \frac{\mathrm{M}+m}{2}$; si ha

$$\frac{2\pi}{g}\mathrm{I}[\eta_0] \leq \mathrm{M}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 + \\ + \frac{\mathrm{M}+m}{2}\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1,$$

$$\frac{2\pi}{g}\mathrm{I}[\eta_0] \geq \frac{\mathrm{M}+m}{2}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 + \\ + m\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1.$$

(1) Cfr. ad es. Picard, *Traité d'analyse*, tome I.

(2) Cfr. Levi-Civita, loc. cit. *Trasformazione di una relazione* ecc., n. 5.

Aggiungendo e togliendo $M\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1$ dal secondo membro della prima, e $m\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1$ dal secondo membro della seconda, dalle precedenti si ottiene

$$\frac{2\pi}{g}\,\mathrm{I}[\eta_0] \leq M\int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 - \\ - \frac{M-m}{2}\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1\,,$$

$$\frac{2\pi}{g}\,\mathrm{I}[\eta_0] \geq m\int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 + \\ + \frac{M-m}{2}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1\,.$$

Ora è [1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 = 1\,; \tag{15}$$

per cui, ponendo

$$\frac{1}{2\pi}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 = \theta_\alpha\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1 = \theta_\beta\,,$$

con che θ_α e θ_β sono numeri positivi e, di più, $\theta_\alpha + \theta_\beta = 1$, le precedenti limitazioni possono scriversi

$$m + \frac{M-m}{2}\,\theta_\alpha \leq \frac{1}{g}\,\mathrm{I}[\eta_0] \leq M - \frac{M-m}{2}\,\theta_\beta\,.$$

Chiamiamo θ'_α e θ'_β ciò che divengono θ_α e θ_β rispettivamente per $x = x'$; allora dalla precedente limitazione si ricava, per qualunque coppia di punti $x\,, x'$,

$$\frac{1}{g}\left\{\mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')]\right\} \leq M - m - \frac{M-m}{2}(\theta_\beta + \theta'_\alpha)\,,$$

$$\frac{1}{g}\left\{\mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')]\right\} \geq m - M + \frac{M-m}{2}(\theta_\alpha + \theta'_\beta)\,.$$

[1] Cfr. Levi-Civita, loc. cit., formula (18).

Si noti che le quantità positive $\frac{\theta_\alpha}{2}, \frac{\theta_\beta}{2}, \frac{\theta'_\alpha}{2}, \frac{\theta'_\beta}{2}$ sono minori ciascuna di $\frac{1}{2}$; ne segue che

$$\frac{\theta_\beta + \theta'_\alpha}{2} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\theta_\alpha + \theta'_\beta}{2} < 1 ;$$

dalle precedenti si deduce pertanto

$$| \mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')] | < \mu g (\mathrm{M} - m) ,$$

essendo $0 < \mu < 1$. Siccome questo vale qualunque sia la coppia di punti x e x', designando M_1 e m_1 il massimo e il minimo di $\mathrm{I}[\eta_0]$ si ottiene

$$\mathrm{M}_1 - m_1 < \mu g (\mathrm{M} - m) .$$

Chiamando M_n e m_n il massimo e il minimo di $\mathrm{I}^n[\eta_0]$, si avrà, applicando successivamente n volte il precedente risultato,

$$\mathrm{M}_n - m_n = \mu^n g^n (\mathrm{M} - m) . \tag{16}$$

Scende da questa che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{M}_n - m_n}{g^n} = 0 ;$$

il che autorizza ad asserire che, se $\frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n}$ ammette un limite quando $n = \infty$, esso è una *costante* perchè la differenza tra il massimo $\frac{\mathrm{M}_n}{g^n}$ e il minimo $\frac{m_n}{g^n}$ tende a zero quando n cresce indefinitamente.

9. Ora $\frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n}$ tende effettivamente a un limite. Infatti consideriamo l'integrale

$$\mathrm{I}^n[\eta_0(x)] = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) \, dx_1 ;$$

togliendo, da entrambi i membri di questa, $g \, \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)]$, si ha, tenendo presente la (15),

$$\mathrm{I}^n[\eta_0(x)] - g \, \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] =$$
$$= \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] - \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] \right\} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) \, dx_1 .$$

Essendo, per la (16),

$$\left| \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] - \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] \right| \leq \mathrm{M}_{n-1} - m_{n-1} < \mu^{n-1} g^{n-1} (\mathrm{M} - m) ,$$

dalla precedente scende, tenendo conto della (15),

$$\left| \mathrm{I}^n[\eta_0(x)] - g\,\mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] \right| < \mu^{n-1} g^n (\mathrm{M} - m),$$

ovvero

$$\left| \frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n} - \frac{\mathrm{I}^{n-1}[\eta_0]}{g^{n-1}} \right| < \mu^{n-1} (\mathrm{M} - m). \tag{17}$$

Allora, se si scrive

$$\frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n} = \eta_0 + \left\{ \frac{\mathrm{I}[\eta_0]}{g} - \eta_0 \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{\mathrm{I}^2[\eta_0]}{g^2} - \frac{\mathrm{I}[\eta_0]}{g} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n} - \frac{\mathrm{I}^{n-1}[\eta_0]}{g^{n-1}} \right\},$$

si vede che

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{g^n} \mathrm{I}^n[\eta_0]$$

si può considerare somma di una serie i cui termini, per la (17), decrescono come quelli di una serie geometrica la cui ragione, in valore assoluto, è < 1. Quindi il limite predetto esiste e, per quanto si è rilevato nel numero precedente, è una costante.

10. Si deduce, dopo ciò, che

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{g^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0] = 0;$$

per cui, assegnato un numero $\varepsilon > 0$, si può trovare un n_0 tale che

$$\left| \frac{1}{g^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0] \right| < \varepsilon, \quad \text{per} \quad n > n_0. \tag{18}$$

Riprendiamo la serie (14) che definisce η. Essa può scriversi

$$\eta = \eta' + \sum_{n_0+1}^{\infty}{}_n \frac{g^n t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{1}{g^n} \mathrm{I}^n[\eta_0] \right),$$

avendo posto

$$\eta' = \sum_{1}^{n_0}{}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0];$$

per la (18) la serie che segue η' nell'espressione di η è manifestamente equiconvergente per qualunque valore finito di t, e per essa lo è pure la (14), c. v. d.

Matematica. — *Campo newtoniano viciniore ad un campo vettoriale assegnato.* Nota di O. Onicescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. La nozione di armonica viciniore ad una funzione assegnata, in una data regione di spazio, introdotta dal prof. Levi-Civita, nella precedente Nota, si può estendere al gradiente di una funzione, o più generalmente ad un campo vettoriale qualsiasi, proponendosi di caratterizzare il campo newtoniano che meno se ne discosta globalmente (il campo viciniore).

La discussione di tale campo viciniore riesce abbastanza semplice, applicando il criterio variazionale di cui si è servito il prof. Levi Civita nella sua Nota. Il relativo potenziale newtoniano rimane determinato dalle due equazioni integrali lineari di seconda specie derivate dal principio di Dirichlet.

Come si vede, questo problema è anche più semplice di quello concernente l'armonica viciniore che richiede l'intervento di una funzione biarmonica.

Il campo newtoniano viciniore ad un campo prefissato è suscettibile di una espressiva interpretazione fisica nella teoria della induzione magnetica. E questo fatto rende, in certo modo, ragione della relativa semplicità del corrispondente problema analitico di approssimazione, costituendone, nello stesso tempo, ciò che si può chiamare una integrazione fisica.

2. Sia, dunque, una porzione finita S dello spazio ordinario, limitata da un contorno σ, costituito da un numero finito di porzioni di superficie regolari, e sia un campo vettoriale (V), di componenti X, Y, Z finite e continue in S e σ.

Essendo Q e Q' punti di σ, P un punto generico di S, rappresentiamo con $r(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ la distanza dei due punti P e Q, e con $\mu(\mathrm{Q})$ una funzione del punto Q, finita e continua in ogni porzione regolare di σ.

Considereremo un insieme $\mathfrak{S}$ di funzioni armoniche u sottoposte alle stesse limitazioni qualitative di cui nel precedente problema dell'armonica viciniore; potremo in conformità rappresentarci u come potenziale di semplice strato, di densità $\mu(\mathrm{Q})$,

$$u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \frac{\mu(\mathrm{Q})}{r(\mathrm{P}, \mathrm{Q})} d\sigma . \tag{1}$$

3. Il campo newtoniano viciniore al campo (V) sarà quello che deriva da un potenziale u, e rende minimo l'integrale

$$\mathrm{I} = \int_\mathrm{S} \sum \left[\frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial x} - \mathrm{X}(\mathrm{P}) \right]^2 d\mathrm{S} .$$

Dato il carattere quadratico di I (cfr. in particolare il n. 3 della Nota precedente), la condizione necessaria e sufficiente pel minimo è semplicemente $\delta I = 0$, dove la variazione δ si riporta alla variazione di u nel campo armonico. Con questa intesa, si ha

$$\delta I = 2 \int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} dS .$$

In base a (1), la variazione armonica δu si può esprimere per la variazione arbitraria (a parte la condizione di continuità) $\delta_1 \mu$, sotto la forma

$$\delta u = \int_\sigma \frac{\delta_1 \mu}{r(P, Q)} d\sigma .$$

Introduciamo questa espressione di δu, e invertiamo gli integrali, operazione evidentemente legittima; si ha

$$\delta I = 2 \int_\sigma \delta_1 \mu \, d\sigma \int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X \right) \frac{\partial \frac{1}{r(P, Q)}}{\partial x} dS .$$

Per l'arbitrarietà di $\delta_1 \mu$, la condizione $\delta I = 0$ dà

$$\int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X \right) \frac{\partial \frac{1}{r(P, Q)}}{\partial x} dS = 0 . \tag{2}$$

Ponendo

$$\int_S \sum X \frac{\partial \frac{1}{r(P, Q)}}{\partial x} = \varphi(Q) , \tag{α}$$

funzione conosciuta, tale essendo per ipotesi il campo (**V**), u sarà determinata dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$\varphi(Q) = \int_S \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{1}{r(P, Q)} \right)}{\partial x} dS . \tag{3}$$

Integrando per parti il secondo membro, e osservando che $\Delta_2 u = 0$ in tutto il campo S di integrazione, ove si indichi con Q′ un punto generico di σ, e con n_i la normale a σ in Q′ (volta verso l'interno del campo), risulta

$$\varphi(Q) = - \int_\sigma \frac{1}{r(Q, Q')} \frac{du}{dn_i} d\sigma \tag{β}$$

che è una equazione integrale di prima specie rispetto ai valori limiti (dall'interno del campo) della derivata normale di u, al contorno. La determi-

nazione di u risulta facile. Infatti, consideriamo la formola classica

$$4\pi u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \left[u(\mathrm{Q}') \frac{d\left(\frac{1}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q}')}\right)}{dn_i} - \frac{1}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q}')} \frac{du}{dn_i} \right] d\sigma .$$

Se facciamo tendere P verso Q, al contorno, la prima parte dell'integrale avrà una discontinuità, la seconda resta continua; sicchè si può scrivere

$$4\pi u(\mathrm{Q}) = 2\pi u(\mathrm{Q}) + \int_\sigma u(\mathrm{Q}') \frac{d \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')}}{dn_i} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')} \frac{du}{dn_i} d\sigma .$$

Tenendo conto di (β) e ordinando, avremo l'equazione integrale

$$(\gamma) \qquad 2\pi u(\mathrm{Q}) - \int_\sigma u(\mathrm{Q}') \frac{d \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')}}{dn_i} d\sigma = \varphi(\mathrm{Q})$$

che interviene nella determinazione di una funzione armonica quando si dà la sua derivata normale al contorno, e che si può chiamare equazione di Robin.

La risoluzione di questa equazione ci dà una unica soluzione $u(\mathrm{Q})$, cioè i valori al contorno della funzione armonica cercata; e la questione è ridotta al classico problema di Dirichlet.

Denotiamo, nel senso del prof. Volterra, con $\mathrm{R}(|\varphi|)$ l'operazione funzionale che dà la soluzione della equazione (γ) di Robin, e con $\mathrm{N}(|u|)$ l'analoga risolvente della equazione coniugata — di Neumann —

$$2\pi \varrho(\mathrm{Q}) + \int_\sigma \varrho(\mathrm{Q}) \frac{d \frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma = u(\mathrm{Q}).$$

Se ci rappresentiamo la cercata funzione armonica u con un potenziale di doppio strato, di momento $\varrho(\mathrm{Q})$,

$$(\delta) \qquad u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \varrho(\mathrm{Q}) \frac{d \frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma ,$$

abbiamo $\varrho(\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(|u(\mathrm{Q})|)$ e, in definitiva,

$$(\varepsilon) \qquad \varrho(\mathrm{Q}) = \mathrm{NR}(|\varphi(\mathrm{Q})|) .$$

Rimane così stabilita l'univoca esistenza della cercata funzione armonica. Perciò *il campo newtoniano viciniore ad un campo vettoriale dato, entro una regione* S *prefissata, è pure univocamente determinato, e la sua determinazione conduce all'operazione funzionale* (ε) *seguita da una integrazione* (δ).

4. Generalità sui campi appartenenti allo stesso campo viciniore. — La determinazione del campo newtoniano non parte direttamente dal campo vettoriale, ma dalla funzione $\varphi(Q)$ subordinata al campo stesso mediante la (α).

Tutti i campi vettoriali, ai quali corrisponde, in S, la stessa $\varphi(Q)$, hanno lo stesso campo newtoniano viciniore, e formano una classe di campi, alla quale — si può facilmente verificare — appartiene anche il comune campo newtoniano viciniore.

In particolare esiste una classe di campi vettoriali, ai quali corrisponde $\varphi(Q) \equiv 0$ e, per conseguenza, $u \equiv 0$.

Se chiamiamo con $(\mathbf{v})$ il campo newtoniano viciniore ad un campo $(\mathbf{V})$ in base alla relazione (2), si può dire che

Un generico campo vettoriale della classe dei campi appartenenti allo stesso newtoniano viciniore $(\mathbf{v})$, *entro* S, *si può comporre per addizione di questo campo* $(\mathbf{v})$, *con un generico campo* $(\mathbf{V}_0)$ *della classe di viciniore newtoniano nullo*, ciò che si può compendiare nella formola

$$(\mathbf{V}) = (\mathbf{v}) + (\mathbf{V}_0) \quad \text{(nel campo S)}.$$

Questa relazione permette di estendere certe proprietà, verificate per la classe speciale dei campi $(\mathbf{V}_0)$, ad un generico campo $(\mathbf{V})$.

5. Interpretazione fisica. — Per collegare il problema analitico di approssimazione, testè trattato, ad un problema fisico, immaginiamo che la regione S sia occupata da un corpo magnetico e che il campo assegnato $(\mathbf{V})$ rappresenti precisamente la distribuzione dei momenti magnetici in S.

Il potenziale magnetico di tale distribuzione in un generico punto potenziato P_1 sarà

$$(1) \qquad U(P_1) = \int_S \sum X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS\,,$$

dove $r = r(P, P_1)$, P designando il punto potenziante.

U è una funzione continua in tutto lo spazio e, come è noto, eseguendo una integrazione per parti, si può esprimere come la somma di un potenziale di superficie e di uno di volume

$$(2) \qquad U = -\int_S \operatorname{div} \mathbf{V} \frac{dS}{r} - \int_\sigma \mathbf{V} \times n_i \frac{d\sigma}{r}\,.$$

Dalla (1), o indifferentemente dalla (2), appare che U è armonica nello spazio esterno a S.

Nell'interno della massa magnetica, applicando a (2) il teorema di Poisson, si ha

$$\Delta_2 U = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{V}\,.$$

Osserviamo che il potenziale armonico U è perfettamente determinato nello spazio esterno ad S se si dànno i suoi valori al contorno.

Consideriamo, adesso, come campo dei momenti magnetici in S il campo newtoniano (v) viciniore al campo (V).

Essendo $v = \text{grad}\, u$ (u armonica), si tratta manifestamente di una distribuzione lamellare e solenoidale.

Il potenziale

$$(3) \qquad U^* = \int_S \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS \equiv - \int_\sigma \frac{du}{dn_i} \frac{d\sigma}{r}$$

determinato dalla nuova magnetizzazione del campo, sarà, come il precedente, armonico fuori di S, e, in questo caso, per l'armonicità di u, anche dentro.

Riportandoci alle equazioni (ε) e seguente del n. 3, risulta che i valori dei potenziali U e U*, ambedue armonici all'esterno di S, sono uguali sul contorno, avendo in un generico punto Q di σ il valore comune $\varphi(Q)$.

Dunque, nello spazio esterno avremo

$$(\iota) \qquad U \equiv U^* .$$

Il campo newtoniano viciniore a (V) *rappresenta dunque quella unica magnetizzazione lamellare e solenoidale dello spazio* S *che dà luogo allo stesso campo magnetico esterno.*

Si può dare a questa conclusione una forma fisicamente più espressiva.

Immaginiamo, da un lato, che il campo S sia occupato da un magnete permanente.

Supponiamo, d'altro lato, che, sostituito al magnete permanente un pezzo di ferro dolce il quale occupi lo stesso spazio S, si mantenga con un mezzo qualunque, per esempio con una opportuna corrente superficiale, lo stesso potenziale magnetico U, nel campo esterno ad S.

Il teorema precedente afferma l'esistenza e l'unicità della magnetizzazione del ferro dolce.

Ma questo si può considerare come un fatto di esperienza, ed allora *la induzione magnetica che si desta nel ferro dolce, induzione che l'esperienza dimostra stabile ed unica, dà il campo newtoniano viciniore al campo* (V) *del magnete permanente.*

Abbiamo dunque una risoluzione fisica del problema analitico, e quindi anche dell'operazione funzionale $NR(|\varphi(Q)|)$.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive*. Nota III [1] di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

5. Vogliamo escludere in (8) il segno di maggiore. Indichiamo con $\Psi(x)$ il primo membro della disuguaglianza detta e con $\Lambda^*(x)$ il suo numero derivato superiore destro. Se x appartiene ad un intervallo (a_m, b_m) contiguo a P_1, ed è distinto da b_m, in x esiste ed è nulla la derivata destra dell'integrale di φ, mentre la sommatoria Σ'_x ha lo stesso numero derivato superiore destro di $F(x)$. È dunque, per gli x detti, $\Lambda^* = \overline{\Lambda}$. Se poi x è un punto di P_1, non primo estremo di un intervallo contiguo all'insieme, il numero derivato superiore destro di Σ'_x è ≤ 0, perchè i termini di questa serie sono tutti negativi, per la (2) del n. 3. Ma quasi dappertutto su P_1, la derivata dell'integrale della φ esiste ed è $= \varphi = \overline{\Lambda}$; dunque, quasi dappertutto su P_1, è $\Lambda^* \leq \overline{\Lambda}$. Se ora osserviamo che la (8) del n. 4 vale anche su ogni porzione di P_1, abbiamo, per tutti gli x ora considerati, $\Lambda^* \geq \overline{\Lambda}$ e perciò, quasi dappertutto su P_1, $\Lambda^* = \overline{\Lambda}$. Questa uguaglianza vale così quasi dappertutto su $(p^{(0)}, p^{(1)})$; e in tutto questo intervallo è poi sempre $0 \geq \Lambda^* \geq \overline{\Lambda}$. Se ne conclude che Λ^* non può essere infinito ($= -\infty$) che nei punti in cui è $\overline{\Lambda} = -\infty$, cioè in un insieme di punti che non contiene nessun insieme perfetto, e che le funzioni $F(x)$ e $\Psi(x)$ non possono differire che per una costante [2]. Essendo poi $\Psi(p^{(0)}) = 0$, risulta dimostrata la (3) del n. 4 per la $F(x)$ e quindi anche per la $f(x)$.

Osservazione. — La formula (3) del n. 4 vale evidentemente anche per ogni porzione di P_1. Inoltre, se x_1 e x_2 sono due punti qualsiasi di $(p^{(0)}, p^{(1)})$, si ha

$$(1) \qquad f(x_2) - f(x_1) = \int_{P_1[x_1, x_2]} \Lambda(x)\, dx + \sum_{x_1, x_2} \{f(b_n) - f(a_n)\},$$

dove $P_1[x_1, x_2]$ indica l'insieme dei punti di P_1 contenuti in (x_1, x_2) e la $\sum\limits_{x_1, x_2}$ è estesa agli intervalli contigui a P_1 contenuti in (x_1, x_2) ed anche a quelle parti (due al più) di tali intervalli eventualmente contenute nel segmento indicato.

6. Dato un insieme perfetto P di (a, b), diremo che un suo punto p è *singolare* se non appartiene come punto *interno* (cioè distinto dagli estremi)

[1] Continuazione della Nota II (questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pp. 106-110).

[2] Ciò per un noto teorema di Scheeffer generalizzato da Ch. J. de la Vallée Poussin (*Cours d'analyse infinitésimale*, tom. I, 3me édit., pag. 101).

a nessuna porzione di P sulla quale valgano le proprietà dei nn. 1-4. L'insieme C dei punti singolari di P è necessariamente chiuso. Se (α, β) è un intervallo contiguo a C, posto $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, si ha

$$f(\beta') - f(\alpha') = \int_{P[\alpha', \beta']} \Lambda(x)\, dx + \sum_{\alpha', \beta'} \{ f(b_n) - f(a_n) \} .$$

Ed infatti, detta P_1 la porzione di P di massima lunghezza contenuta in (α', β'), ogni punto di P_1 è interno ad una porzione di P su cui valgono tutte le proprietà dei nn. 1-4. Per un noto teorema di Borel, si può allora ricoprire tutto P_1 con un numero finito di porzioni di P su ciascuna delle quali valgano le stesse proprietà; e queste varranno perciò su l'intero insieme P_1 ed anche su una porzione P'_1 di P contenente come punti interni tutti quelli di P_1. L'uguaglianza sopra scritta non è dunque che la (1) del n. 5 applicata all'intervallo (α', β') e all'insieme P'_1.

Data la continuità della $f(x)$, con un passaggio al limite, si ottiene il valore della differenza $f(\bar{\beta}) - f(\bar{\alpha})$, per qualsiasi intervallo $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ appartenente ad (α, β).

Se il primo estremo c_1 di C non coincide con a, quanto si è detto per (α, β) vale anche per (a, c_1). Altrettanto dicasi per (c_2, b), dove c_2 è il secondo estremo di C. Se c è un punto isolato di C, ed α e β sono i punti di C più prossimi ad esso, a sinistra e a destra, applicando quanto si è ora detto agli intervalli (α, c), (c, β), si ottengono le differenze $f(c) - f(\alpha)$, $f(\beta) - f(c)$ e quindi, sommando, anche $f(\beta) - f(\alpha)$; e si ottiene pure $f(\bar{\beta}) - f(\bar{\alpha})$, dove $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ è un qualsiasi intervallo di (α, β). Così proseguendo, si ottiene la differenza $f(\beta) - f(\alpha)$ relativa ad un qualsivoglia intervallo (α, β) appartenente ad un intervallo contiguo al primo derivato C' di C. Ripetendo queste operazioni un'infinità numerabile di volte, si ottiene il valore di $f(\beta) - f(\alpha)$ per un qualsiasi (α, β) appartenente ad un intervallo contiguo al massimo insieme perfetto $P^{(1)}$ contenuto in C.

Osserviamo qui che, per le proposizioni dei nn. 1-4, $P^{(1)}$ *è ovunque non denso su* P.

7. Prendiamo come insieme perfetto P l'insieme di tutti i punti di (a, b) e indichiamo con $C^{(1)}$ l'insieme dei suoi punti singolari, i quali attualmente sono quelli che non appartengono come punti interni a nessun intervallo parziale di (a, b) su cui Λ sia limitato superiormente, integrabile e soddisfacente alla

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_2}^{x_1} \Lambda\, dx .$$

Detto $P^{(1)}$ il massimo insieme perfetto contenuto in $C^{(1)}$, col procedimento del numero precedente otteniamo il valore della differenza $f(\beta) - f(\alpha)$

relativo ad un qualsivoglia intervallo contenuto in un intervallo contiguo a $P^{(1)}$. Partendo da $P^{(1)}$ e detto $P^{(2)}$ il massimo insieme perfetto contenuto nell'insieme dei punti singolari di $P^{(1)}$, otteniamo, col procedimento del numero precedente, il valore della differenza $f(\beta)-f(\alpha)$ per qualsiasi (α,β) contenuto in un intervallo contiguo a $P^{(2)}$. E così proseguiamo *transfinitamente.*

Ciascuno degli insiemi perfetti che così veniamo a costruire,

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(\omega)}, P^{(\omega+1)}, \ldots P^{(2\omega)}, P^{(2\omega+1)}, \ldots,$$

è contenuto in tutti i precedenti. Se dunque non esistesse fra questi un ultimo insieme, esisterebbe un certo numero transfinito $\bar{\omega}$ per il quale $P^{(\bar{\omega})}$ risulterebbe identico a tutti gli insiemi P che lo seguono [1]. Ma $P^{(\bar{\omega}+1)}$, dovendo essere ovunque non denso su $P^{(\bar{\omega})}$, non può coincidere con $P^{(\bar{\omega})}$, e resta così dimostrata l'esistenza di un ultimo insieme $P^{(\bar{\omega})}$. Applicato allora a questo $P^{(\omega)}$ il procedimento del numero precedente, si ottiene $f(\beta)-f(\alpha)$ per un qualsiasi (α,β) di (a,b). *Il procedimento, indicato in questo e nel numero precedente, permette quindi di risalire dalla conoscenza del numero derivato superiore destro $\Lambda(x)$ alla funzione continua $f(x)$ (a meno di una costante arbitraria), nell'ipotesi, fino ad ora ammessa, che Λ sia sempre finito o, tutt'al più, uguale a $-\infty$ in un insieme che non contenga alcun insieme perfetto.*

8. Supponiamo ora che, ferma restando l'ipotesi fatta sull'insieme $E_{-\infty}$ dei punti in cui è $\Lambda=-\infty$, il numero derivato Λ possa diventare anche uguale a $+\infty$, purchè l'insieme $E_{+\infty}$ dei punti in cui è $\Lambda=+\infty$ non contenga neppur esso alcun insieme perfetto. Dimostriamo subito che anche in questo caso vale la proposizione: *in ogni insieme perfetto* P *di* (a,b) *esiste sempre almeno una porzione sulla quale Λ ammette un limite superiore finito.*

Supponiamo, infatti, la proposizione non vera e cioè che, preso comunque un numero N, su ogni porzione di P esista sempre almeno un punto in cui è $\Lambda > N$. Si divida in due parti uguali il minimo segmento che contiene l'insieme P e, detto c il punto di divisione, si indichino con P_1 e P_2 le due massime porzioni di P_1 alla sinistra e alla destra di c. Detto n un intero positivo qualunque, esiste in P_1 almeno un punto q a cui corrisponde un q' (non necessariamente appartenente a P_1) di (a,b) in modo che sia

$$0<q'-q\leq\frac{1}{n}, \quad f(q')-f(q)\geq 2n(q'-q).$$

Sia $2l$ il limite superiore delle differenze $q'-q$ relative a tali coppie; sia

(1) Cfr. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 92).

poi $q_{n,1}$ il limite inferiore dei q a cui corrispondono differenze $q' - q \geq l$. Questo $q_{n,1}$ appartiene necessariamente a P_1 e, per la continuità della funzione $\frac{f(q')-f(q)}{q'-q}$, quando $q'-q \geq l > 0$, possiamo affermare l'esistenza in (a, c) di almeno un punto q' tale che sia

$$l \leq q' - q_{n,1} \leq \frac{1}{n} , \; f(q') - f(q_{n,1}) \geq 2n(q' - q_{n,1}).$$

Fra questi q' sia $q'_{n,1}$ il minore, e indichiamo con $d_{n,1}$ il massimo intervallo della retta su cui giace (a, b), che ha per centro il punto $q_{n,1}$, ampiezza $\leq q'_{n,1} - q_{n,1}$ $\left(\text{e quindi } \leq \frac{1}{n}\right)$, e tale che, per ogni suo punto q, valga la disuguaglianza $f(q'_{n,1}) - f(q) \geq n(q'_{n,1} - q)$.

Operando in modo analogo su P_2, troveremo un intervallo $d_{n,2}$, di lunghezza $\leq \frac{1}{n}$ e avente il centro $q_{n,2}$ in un punto di P_2, ed un punto $q'_{n,2}$, ad esso esterno, e tale che sia $0 < q'_{n,2} - q_{n,2} \leq \frac{1}{n}$ ed anche $f(q'_{n,2}) - f(q) \geq n(q'_{n,2} - q)$, per ogni punto q di $d_{n,2}$. Indichiamo poi con P_3, P_4, P_5 le massime porzioni di P eventualmente rimanenti alla sinistra di $d_{n,1}$, fra $d_{n,1}$ e $d_{n,2}$, e alla destra di $d_{n,2}$. Su ciascuna di queste porzioni si operi come già si è fatto su P, dividendo però i minimi segmenti che le contengono, non in due, ma in quattro parti. E così si prosegua indefinitamente, raddoppiando sempre il numero delle parti in cui si dividono i minimi segmenti che contengono le porzioni di P che si considerano. Si otterrà in tal maniera una successione (eventualmente ridotta ad un numero finito) di intervalli

$$(\alpha) \qquad d_{n,1}, d_{n,2}, d_{n,3}, \ldots, d_{n,r}, \ldots,$$

aventi tutti il centro su P e lunghezza sempre $\leq \frac{1}{n}$, ovunque densi su P [1] e tali che esista, per ognuno di essi, un punto $q'_{n,r}$, esterno e alla destra di $d_{n,r}$; e soddisfacente alle disuguaglianze $0 < q'_{n,r} - q_{n,r} \leq \frac{1}{n}$, $f(q'_{n,r}) - f(q) \geq n(q'_{n,r} - q)$, dove $q_{n,r}$ è il centro di $d_{n,r}$ e q è un punto qualsiasi di quest'intervallo. Dando ad n tutti i valori interi positivi, si ottengono infinite successioni (α), e, detto E_n l'insieme dei punti appartenenti ad almeno un $d_{n,r} (r = 1, 2, \ldots)$, l'insieme E dei punti che appartengono a tutti gli E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ha la potenza del continuo e contiene un insieme perfetto

[1] Vale a dire, in ogni porzione di P vi è almeno un punto appartenente ad uno degli intervalli detti.

[perchè gli elementi di (α) sono ovunque densi sull'insieme perfetto P [1]]. Sia P' tale insieme perfetto e p un suo punto. Detto $d_{n,r}$ un intervallo di (α) che contiene p, è $f(q'_{n,r}) - f(p) \geq n(q'_{n,r} - p)$; e poichè $q'_{n,r}$, essendo esterno e alla destra di $d_{n,r}$, è pure alla destra di p, ed è

$$q'_{n,r} - q_{n,r} \leq \frac{1}{n}, \quad |q_{n,r} - p| \leq \frac{1}{2n},$$

è necessariamente $\Lambda(p) = +\infty$. Da ciò segue che $E_{+\infty}$ contiene un insieme perfetto, contro l'ipotesi fatta. La proposizione enunciata è dunque provata. E poichè tale proposizione non è che quella del n. 1 per il caso attuale, si conclude che il procedimento indicato ai nn. 6 e 7 permette di calcolare la differenza $f(\beta) - f(\alpha)$ per qualsiasi intervallo (α, β) di (a, b). Il procedimento ricordato non è che quello di integrazione alla Denjoy, e possiamo così affermare che

il procedimento di integrazione alla Denjoy permette di risalire, dalla conoscenza di un numero derivato, alla funzione primitiva, continua (che viene determinata a meno di una costante), nell'ipotesi che nessuno dei due insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$ *dei punti in cui il numero derivato è uguale a* $-\infty$, $+\infty$, *contenga un insieme perfetto.*

Di qui segue anche che non possono esistere due funzioni continue, differenti fra loro non per una sola costante, e aventi uno stesso numero derivato soddisfacente alla condizione sopra indicata. Il problema posto nell'introduzione è dunque risoluto, ed ammette una soluzione unica.

Possiamo aggiungere la seguente osservazione. Come è noto, il valore dell'integrale del Lebesgue di una funzione, data su un intervallo o semplicemente su un insieme misurabile, è indipendente dai valori che essa funzione assume su un insieme di misura nulla; altrettanto quindi potrà dirsi dell'integrale alla Denjoy, nel quale i valori della funzione da integrare intervengono solo a traverso l'integrale del Lebesgue. Ne viene che il calcolo della funzione primitiva, quando sia soddisfatta la condizione relativa agli insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$, può eseguirsi anche se il valore del numero derivato che si considera non è conosciuto in un insieme di punti di misura nulla.

9. Abbiamo già osservato nell'introduzione che una funzione continua non è determinata, a meno di una costante, da un suo numero derivato, quando almeno uno degli insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$ contiene un insieme perfetto. Possiamo aggiungere che, pur essendo soddisfatta la condizione per $E_{-\infty}$ e $E_{+\infty}$ di non contenere alcun insieme perfetto, l'indeterminazione della primitiva sussiste se il numero derivato non è conosciuto in un insieme I di misura non nulla. Ed infatti, detto P un insieme perfetto contenuto in I e

[1] Cfr. la mia Nota *Sulla potenza di alcuni insiemi*, che apparirà fra breve nel « Giornale di matematiche del Battaglini ».

di misura non nulla (¹), indichiamo con $m(x)$ la misura della porzione di P compresa in (a, x). Questa funzione $m(x)$ è continua e non costante su tutto (a, b), ha numeri derivati in modulo non superiori ad 1, ed ha derivata nulla in tutti i punti non appartenenti a P; la funzione $f(x) + m(x)$ ha, pertanto, in tutti i punti non appartenenti a P ed *a fortiori* in tutti quelli non appartenenti ad I, gli stessi numeri derivati della $f(x)$; essa, inoltre, ha numeri derivati infiniti solo là ove sono infiniti (e di segno uguale a quello dei suoi) i numeri corrispondenti della $f(x)$.

Tenendo presente quanto si è detto al numero precedente, si può concludere con la proposizione enunciata alla fine dell'introduzione.

Osserviamo, da ultimo, che se l'insieme E_∞, dei punti che appartengono a $E_{-\infty}$ o a $E_{+\infty}$, contiene un insieme perfetto, altrettanto avviene di almeno uno dei due $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$. Ed infatti, considerando ad es. il numero derivato superiore destro ed ammesso che $E_{+\infty}$ non contenga insiemi perfetti, per la proposizione enunciata al principio del n. 8, possiamo affermare che su ogni insieme perfetto appartenente a E_∞ esiste sempre almeno una porzione tutta appartenente ad $E_{-\infty}$ (²).

Petrografia. — *Osservazioni sulle lave leucitiche del vulcano di Roccamonfina.* Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio C. VIOLA.

Una rapida gita al vulcano di Roccamonfina e un breve esame del materiale raccolto mi permisero di stabilire taluni fatti interessanti.

Lo *sperone*, ritenuto una lava speciale dei monti Laziali dai primi che lo studiarono senza averlo mai riconosciuto altrove, può apparire in tutte le regioni eruttive. Questo fatto si sarebbe potuto dedurre quando lo Struever ritenne che lo sperone fosse dovuto all'azione delle emanazioni cloridriche sulla copertura delle lave grige (³), se tale opinione avesse avuto un qualche fondamento. Ma ventitrè anni dopo, quando erano conosciuti i pirosseni verdi e gialli, ignorati all'epoca in cui scrisse lo Struever, dimostrai che questa roccia è l'effetto di un'alterazione immediata delle lave grige per addizione di soda nella costituzione dei pirosseni ordinarii al momento della loro con-

(¹) È ben noto che la misura di un insieme di punti è uguale al limite superiore di quelle degli insiemi perfetti contenuti nell'insieme considerato.

(²) Aggiungiamo qui la seguente proposizione: « una funzione continua, per la quale nessuno dei due insiemi in cui i suoi numeri derivati destri (sinistri) diventano infiniti contenga un insieme perfetto, ammette quasi dappertutto derivata finita uguale a tali numeri derivati ».

(³) *Studî petrografici sul Lazio.* Mem. Lincei, 1877.

solidazione. Perciò dall'augite si passa all'augitegirina, e all'egirina nei punti dove la trasformazione è completa [1]. La generalizzazione di questa forma d'alterazione divenne così possibile, e difatti bastò cercarla altrove per ritrovarla, indipendentemente dalla natura della roccia originaria, ma dipendentemente dalla natura delle emanazioni intorno ai crateri.

Oltre dunque ai Monti Laziali, la sola regione tra quelle descritte finora in cui lo sperone mostrasi con abondanza eccezionale in intere colate con derivazione dalle leucititi, io l'ho ritrovato nei Vulsini, non solo come derivazione delle leucititi sotto Montefiascone, a Fiordine, a Palombara, a Montienzo; ma altresì come derivazione delle leucotefriti lungo la nuova rotabile da Viterbo a Marta, all'Isola Bisentina, presso S. Lorenzo Nuovo, ai Cappuccini d'Acquapendente; e come derivazione delle andesiti lungo la nuova variante della rotabile da Bolsena ad Orvieto. Nei Cimini tale forma è rarissima, ma appare ben definita presso Vetralla come derivazione d'un'andesite (trachioligoclasite), a cui detti il nome di vetrallite [2], e come derivazione d'una fonotefrite che esiste solo in pezzi erratici e in inclusi, disseminati in tutta la regione [3]. Non può quindi meravigliare se trovai questa stessa forma tra le lave di Roccamonfina, e se si troverà anche in altri siti.

Lo sperone di Roccamonfina fu da me rinvenuto sotto la rotabile da Sessa a Mignano, al Fosso Fontana della Pigna. È colorato in giallo d'ocra chiara, contiene abondanti leuciti di alcuni mm. di diametro, e nel microscopio si determina come leucotefrite acida, egirinica, con granati molto piccoli e numerosi, colorati in giallo-miele intenso [4]. I pirosseni del primo tempo sono verdi con chiazze ed orli ingialliti, e nel minor numero bianchi con orli verdi.

Sullo stesso fianco della montagna su cui fu trovato lo sperone anzidescritto, si vedono numerose e potenti colate di leucotefriti grige. La loro maggioranza è simile alle lave omonime del vulcano di Vico. Vi è difatti il tipo gremito di grandi leuciti come quello di Civitacastellana, il tipo gremito di leuciti intermedie come quello del Casale Risiere presso S. Martino, e il tipo omogeneo e in cui si vedono solo leuciti fittissime e appena visibili ad occhio nudo come presso il cimitero della stessa borgata. Vi è poi un tipo che non esiste nei Cimini, ma si trova nei Vulsini, e che sopra una pasta grigia mostra poche leuciti, irregolarmente e scarsamente disseminate, con 6 a 7 mm. di diametro.

Un campione, proveniente da una cava aperta della società « la Leucite » in una lava piena di grandi leuciti mostrò la seguente composizione:

(1) *Vulcano Laziale.* Mem. descr. Carta geol. d'It., vol. X, pag. 150.

(2) *Vulcani Cimini.* Mem. descr. Carta geol. d'It., vol. XV, pag. 360.

(3) Idem, ibid., pag. 398. È notevole la breve distanza a cui trovai queste due rocce.

(4) Il granato può anche mancare negli speroni, la cui colorazione gialla è dovuta all'egirina. I termini di passaggio sono invece colorati in verde dell'augitegirina.

I. Plagioclasio in cristalli piccoli ed allungati, pirosseni verdastri, grandi leuciti con qualche inclusione d'auina, olivina rarissima.

II. Pirossene verdastro, labradoro, leucite, magnetite.

Nelle altre leucotefriti, basiche come la precedente, ho trovato gli stessi elementi, meno variazioni di grandezza e di proporzioni, e nelle leuciti di piccole dimensioni di qualcuna di esse gli stessi tipi d'inclusioni vedute nelle lave leucitiche dell'Italia Centrale. Sarà bene di riassumerli.

Le inclusioni suddette sono spesso cristallini isolati di pirossene e di magnetite, talvolta gruppi di tali elementi ai quali può aggiungersi felspato e materia amorfa. La loro distribuzione è in rapporto con la simmetria del cristallo includente, sopra una superficie parallela alla sua superficie esterna. In sezione si ha una distribuzione *a corona* in vicinanza del perimetro. In generale manca la distribuzione a corone concentriche figurate nei trattati.

I gruppi d'inclusioni in molte leuciti si estendono fino ad occupare dei settori poliedrici del cristallo, i quali però non sono a contatto, ma lasciano tra le facce delle loro superficie laterali una breve interruzione. Queste interruzioni formano degli spazii diametrali (zone) in cui la leucite è bianca, limpida perchè senza inclusioni. Talvolta i settori d'inclusioni lasciano uno spazio di leucite pura lungo la superficie esterna del cristallo di leucite che lo fanno facilmente riconoscere distinguendolo nettamente dalla pasta circostante. altre volte invece questi settori continuano senza interruzione e senza distinzione in quella pasta. Nel caso più frequente i settori sono otto, in corrispondenza delle facce dell'ottaedro, e lasciano tre spazii diametrali ad angolo retto. Si capisce agevolmente che una sezione microscopica taglierà queste figure dando delle fascette bianche in mezzo ai cristallini di pirossene, di felspato e di magnetite del secondo tempo della roccia. E a seconda dell'orientamento della sezione rispetto ad una data leucite, apparirà una croce bianca a braccia ortogonali od oblique, uguali o disuguali, con o senza fascetta bianca perimetrale. Finalmente invece della croce si può avere una sola fascetta rettilinea. I settori poliedrici inoltre possono essere divisi in più parti da zone parallele alle corrispondenti facce della leucite, e allora sulla sezione si potranno vedere altresì fascette bianche, concentriche con la fascetta periferica.

Se la leucite ha la forma abituale del trapezoedro o del dodecaedro romboidale i settori saranno quarantotto e una sezione perpendicolare ad un asse quaternario darà due croci bianche concentriche, con le braccia a 45°, e le cui variazioni, al variare dell'orientamento della sezione, sono anch'esse facili a dedurre. Anche in questo caso potranno apparire le fascette perimetrali e concentriche.

Ai casi esposti si aggiungono quelli più complessi e non sempre facili a riconoscere. Il meno complicato è quello delle croci formate da un braccio lungo comune, tagliato da due o più braccia più corte. Ordinariamente i

mezzi segmenti intercettati sul braccio lungo sono minori dei bracci corti corrispondenti. Si deduce l'esistenza di tre o più leuciti così vicine che non hanno potuto svilupparsi completamente. E vi è poi il caso di croci le cui braccia si tagliano obliquamente. Si deduce che si tratta di leuciti i cui edifizii molecolari sono *compenetrati*; ossia che nello spazio occupato in comune ognuna di tali leuciti possiede un certo numero soltanto delle sue molecole, mentre le molecole corrispondenti degli altri individui del gruppo non esistono, e viceversa.

Conchiudendo, ogni volta che tra gli elementi microlitici d'una roccia si vede disseminata della materia bianca, isotropa, in forma di croci, di stelline, di poligoni semplici, o multipli e concentrici, in cui sono iscritte croci e stelline riunenti i vertici o i punti medii dei lati del perimetro, con frequente simmetria intorno a due assi ortogonali, e insieme croci con un braccio comune e figure più complesse, si può concludere *a priori* che si tratta di leucite (¹).

Così pure se, invece di lava intatta, si esamina una lava alterata o un tufo alterato del pari, e si vedono croci e stelline bianche sopra un fondo nero, rossastro, giallastro, si può concludêre che la roccia è, o è stata, leucitica (²).

Patologia vegetale. — *Un interessante parassita del lupino non ancora segnalato in Italia: Blepharospora terrestris (Sherb.)* Peyr. (³). Nota del dott. BENIAMINO PEYRONEL, presentata dal Socio G. CUBONI.

Ai primi dello scorso dicembre 1919 il sig. F. Lanza recava alla Stazione di patologia vegetale di Roma un certo numero di giovani piante di lupino (*Lupinus albus*) affette da un grave marciume delle radici e della regione ipocotilea. Dette piante provenivano dalle tenute Pantano e Pratolongo, nei pressi del lago Regillo.

Dell'apparato radicale non rimaneva che il fittone assile con pochissime radici secondarie; di tubercoli radicali, nessuna traccia.

Tanto le radici quanto la parte inferiore del fusto apparivano fortemente imbruniti su tutta la loro superficie e molli al tatto; le foglie, salvo poche apicali, erano tutte disseccate.

All'esame microscopico trovai che le radici e quasi tutta la parte ipocotilea del fusto erano completamente invase e disorganizzate da un micelio

(¹) Cfr. *Vulcano Laziale* cit., pag. 274, figg. 61 e 62.
(²) Cfr. idem, pag. 275, fig. 63.
(³) Lavoro eseguito nella Stazione di Patologia vegetale di Roma.

fungino che, per i suoi caratteri morfologici (assenza quasi completa di setti, protoplasma fortemente granuloso), dimostrava chiaramente di appartenere a qualche ficomicete. Nei tessuti corticali di poche piantine rinvenni pure delle oospore, invero non molto numerose.

Allo scopo di moltiplicare il materiale di studio e di osservare il comportamento del fungo, preparai due serie di colture di lupino in vasi cilindrici senza foro basale.

Quando le piantine ebbero formato le prime foglie, le inondai in modo da mantenere costantemente uno strato d'acqua di 1-2 cm. sopra la superficie del terreno; in una serie di vasi trapiantai in mezzo ai giovani lupini quelli infetti (che avevo nel frattempo conservati in acqua), e l'altra serie la tenni per controllo. Il risultato si fu che *tutti i lupini delle colture infette rimasero uccisi*, mentre quelli tenuti per controllo sono tuttora vivi e, benchè, naturalmente, un po' clorotici e sofferenti per asfissia radicale, immuni da qualsiasi forma di marciume.

Nei tessuti radicali dei lupini morti rinvenni il solito micelio, e inoltre nei tessuti corticali di tutti quanti trovai in gran numero oogonii ed oospore mature, affatto identiche a quelle che avevo osservate nei lupini del sign. Lanza. Esse si riconoscono facilmente per una caratteristica particolare, di conservare, cioè, a lungo addossato alla parete primitiva dell'oogonio l'anteridio vescicoloso, il quale circonda parzialmente o totalmente, a guisa di manicotto, il peduncolo dell'oogonio stesso.

Questa particolare disposizione dell'anteridio si osserva naturalmente anche meglio nei giovani oogonii, prima della formazione della oospora.

Oltre al micelio endocellulare, agli organi sessuali ed alle oospore, sui cotiledoni sommersi delle piantine uccise osservai un abbondante micelio esterno, nuotante nell' acqua, sul quale, all'esame microscopico, apparivano inseriti — isolati o talora in gruppi di 2-3 — dei grandi zoosporangi ovali o limoniformi, più o meno distintamente papillati all'apice, ripieni, da giovani, d'un protoplasma denso di guttule oleose.

Negli zoosporangi maturi il plasma si differenzia in un numero variabile di zoospore immobili o cigliate.

Le zoospore immobili sono globose e germinano spesso direttamente nell'interno dello sporangio emettendo attraverso la parete di questo un tubo miceliare che tosto si ramifica. Le zoospore mobili sono depresse ad un lato ed ivi munite di due ciglia. Qualche zoosporangio, invece di essere inserito all'estremità d'un ramo miceliare, più o meno lungo, è intercalare, cioè la sua parte apicale si attenua e si continua in un filamento micelico.

Ricerche sperimentali sulla morfologia e biologia di questo interessante ficomicete saranno quanto prima istituite su più vasta scala. Ma credo opportuno fin d'ora richiamare l'attenzione dei fitopatologi sul fatto che le osservazioni sin qui eseguite già permettono di stabilire l'identità del fungo

in questione con la *Phytophthora terrestria* Sherbakoff (¹), recentemente segnalata in America come producente, nello Stato della Florida, un marciume assai grave dei frutti di pomodoro, noto colà sotto il nome di « *buckeyerot* », nonchè un marciume dei fusti di *Lupinus* sp. (*stem rot*) e il marciume del colletto (*foot rot*) degli agrumi.

La descrizione e le figure, che il Sherbakoff dà della *Ppytophthora terrestria* (sic!), si attagliano perfettamente al fungo da me osservato sul lupino.

Prima ancora ch'io mi fossi accorto di questa identità, ero rimasto colpito dalla straordinaria somiglianza del fungo in questione con la *Blepharospora cambivora*, che, secondo le magistrali recenti ricerche del Petri, sarebbe l'agente specifico della « malattia dell'inchiostro » del castagno, e che io stesso ho più volte isolata — allo stato di micelio sterile — dai castagni affètti da quel malanno a Soriano nel Cimino. Chiunque confronti le figure del Petri con quelle dello Sherbakoff converrà con me che si tratta di funghi per lo meno molto affini tra loro. La loro parentela ci è rivelata anche dal fatto che, come ho detto prima, la *Ph. terrestria* non attacca solo piante erbacee, ma produce eziandio nei *Citrus* una malattia che ha notevoli analogie col « mal dell'inchiostro ». Il che, a mio avviso, rappresenta anche una conferma della effettiva *capacità a delinquere* della specie petriana.

Nonostante la loro notevole affinità, le due specie sembrano però ben distinte, principalmente da due particolarità, una morfologica e l'altra biologica. Nella *Bleph. cambivora*, stando alle figure e alla diagnosi del Petri, l'unione dell'anteridio con l'oogonio sembra avvenire all'incirca come nel gen. *Pythium*: esso anteridio è costituito da un semplice ramo di micelio, non ingrossato nè vescicoloso e che non circonda affatto il peduncolo dell'oogonio. Inoltre nella *Bleph. cambivora* il micelio non fruttifica sugli ordinarii substrati solidi, ed è solo in colture liquide o su *humus* molto umido che il Petri ha potuto ottenere la formazione degli sporangi.

All'incontro, secondo lo Sherbakoff, la *Ph. terrestria* fruttificherebbe facilmente sui sustrati solidi, come anche sui frutti di pomidoro. Per questo carattere la specie si avvicina maggiormente a *Ph. omnivora*, con cui presenta, assieme a *Bl. cambivora*, anche altre notevoli analogie d'ordine morfologico.

È evidente, ad ogni modo, che la specie del Sherbakoff presenta tutti i caratteri del genere *Blepharospora*, quale è definito, per quanto un po' vagamente, dal Petri. Il nome specifico *terrestria*, poi, è di un latino... un po' troppo americano, e va corretto. Propongo pertanto di dare al fungo il nome di *Blepharospora terrestris* (Sherb.) Peyronel.

Siamo in presenza d'un parassita fungino recentemente importato dall'America? Io propendo piuttosto a credere che si tratti di specie ubiqui-

(¹) Sherbakoff C. D., *Buckeye rot of tomato fruit*, Phytopathology, 7, anno 1917, pp. 119-129.

taria, già preesistente in Europa, vivente ordinariamente allo stato saprofitario nei terreni molto umidi e che può, quando trovi condizioni ed ospiti adatti, comportarsi anche parassiticamente. Estenderei volentieri, sia detto incidentalmente, questo modo di vedere anche alla *Blepharospora cambivora*.

Sarà bene, in ogni modo, tener d'occhio questa crittogama che, a giudicare dagli effetti prodotti sui lupini, sembra capace di produrre danni considerevoli quando trovi favorevoli condizioni d'ambiente, e principalmennte, come sembra, un eccesso di umidità nel terreno.

Come metodo di lotta non si può per ora che consigliare la distruzione delle piante infette, il risanamento, mediante opportuno drenaggio, del terreno e la disinfezione del medesimo col solfuro di carbonio o con la formalina. Sarà bene sostituire per alcuni anni la coltura del lupino con quella di altre piante erbacee presumibilmente refrattarie, come i cereali.

Matematica. — *Armonica viciniore ad una funzione assegnata.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

1. — Generalità circa una classe di problemi di approssimazione. — Armonica viciniore in un campo a tre dimensioni.

Sia U(P) una funzione finita e continua dei punti di un campo S, a una o più dimensioni, intendendo incluso in S anche il relativo contorno. Sia d'altra parte $u(P)$ una funzione, pure finita e continua in S, appartenente ad un certo tipo o, più generalmente, insieme di funzioni $\mathfrak{C}$.

Si è condotti naturalmente a proporsi la questione di caratterizzare, fra le funzioni dell'insieme $\mathfrak{C}$, quella (o quelle, se ve ne ha di più) che maggiormente si approssima *in media* alla data U(P), alludendosi con ciò alla circostanza che riesca minimo il divario globale fra U e u; ossia, in modo preciso, il così detto errore medio quadratico. Questo equivale ad esigere che riesca minimo l'integrale

$$(1) \qquad \mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{U} - u)^2 \, d\mathrm{S}.$$

Per alcune categorie $\mathfrak{C}$ di funzioni, la questione si riporta subito a ordinarî problemi di massimo e minimo Tale il caso in cui le funzioni u dell'insieme $\mathfrak{C}$ dipendono da un numero finito di parametri (variabili con continuità entro certi intorni). Nel caso più generale, in cui le u dell'insieme $\mathfrak{C}$ dipendono punto per punto (intendo in modo non funzionale) da una o più funzioni arbitrarie e loro derivate fino ad un certo ordine, la questione rientra classicamente nell'àmbito del calcolo delle variazioni e si riconduce ad equazioni differenziali.

Non è più così, almeno in generale, quando le u dell'insieme dipendono in modo noto ma funzionale da altre funzioni arbitrarie. I principî del calcolo delle variazioni sono ancora applicabili; ma la condizione che si annulli la variazione prima porta ad equazioni di natura più complessa, per es. integrali od integro-differenziali, di cui la teoria, in relazione al problema variazionale, è ben lungi dall'essere così progredita come lo è per i sistemi puramente differenziali. Ciò ebbe a rilevare in linea generale il prof. Fubini, indicando varî tipi di problemi di calcolo delle variazioni, che dànno luogo a equazioni funzionali [1].

Qui intendo unicamente occuparmi del *minimo di* I *nella ipotesi che* S *sia una porzione* (*finita*) *dell'ordinario spazio a tre dimensioni, limitata da un contorno* σ, *e che* u *debba essere armonica* e continua anche al contorno, assieme con la sua derivata normale. La discussione riesce in tal caso esauriente, invocando noti teoremi esistenziali concernenti le funzioni biarmoniche: ne rimangono rigorosamente stabilite l'univoca esistenza dell'armonica *viciniore* u e le sue relazioni colla funzione assegnata U. Quando si tratta in particolare di un campo sferico, si può ulteriormente ricondurre la determinazione della u all'ordinario problema di Dirichlet, e quindi al calcolo dell'integrale di Poisson: vi si perviene profittando di eleganti e ormai ben noti accorgimenti che già furono introdotti dall'Almansi e dal Boggio.

2. — Specificazioni qualitative.

Supporremo che la superficie (o il complesso di superficie) σ, che costituisce il contorno di S, sia regolare o almeno costituito da un numero finito di porzioni regolari (ciascuna dotata di piano tangente e di curvature variabili con continuità).

Detto Q un punto generico di σ, $d\sigma$ un elemento circostante a Q, rappresenteremo con $r(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ la distanza da Q a un punto generico P di S, e con $\mu(\mathrm{Q})$ una funzione dei punti di Q, ovunque finita, e, in ogni porzione regolare di σ, anche continua.

Ciò premesso, precisiamo la varietà $\mathfrak{S}$ di funzioni u, armoniche entro S, da prendere in considerazione. Nella natura delle cose è di richiedere che $\mathfrak{S}$ comprenda tutte le funzioni armoniche, regolari nel campo, le quali rimangono finite anche al contorno, con che ha certo un senso l'integrale I. Noi limiteremo la nostra indagine imponendo ancora alle u una limitazione qua-

[1] *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali* (Annali di matematica, serie III, tomo XX, 1913, pp. 217-245). Per l'equazione di Fredholm di seconda specie, già Hilbert aveva rilevato [cfr. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, Teubner, 1912, pp. XI e 28] che essa proviene da un problema di minimo risalente a Gauss.

litativa circa il comportamento al contorno, e precisamente che, ove si risguardi una u (come è sempre lecito) quale potenziale di semplice strato e la si assuma quindi sotto la forma

$$u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \frac{\mu(\mathrm{Q})}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}\, d\sigma, \tag{2}$$

la densità $\mu(\mathrm{Q})$ sia una funzione finita e generalmente continua nel senso testè specificato. Notoriamente, quando il contorno σ è ovunque regolare, allora la condizione addizionale concernente μ si esprime con eguale semplicità direttamente per u, equivalendo alla continuità della sua derivata normale al contorno.

3. — Variazione di I. – Trasformazione della condizione $\delta \mathrm{I} = 0$. – Residuo. – Eguaglianza dei valori medii. – Constatazione di minimo. – Corrispondente espressione di I.

Per passare da una generica u dell'insieme $\mathfrak{T}$ ad altra funzione infinitamente vicina dello stesso insieme, basta evidentemente attribuire a μ un incremento $\delta\mu = \chi(\mathrm{Q})$ *completamente arbitrario*, beninteso sotto le stesse condizioni di continuità imposte a μ. Si ha così

$$\delta u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \frac{\chi}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}\, d\sigma. \tag{3}$$

D'altra parte, dalla espressione (1) di I segue immediatamente, mettendo anche in evidenza il punto generico P del campo di integrazione,

$$\delta \mathrm{I} = -2 \int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \} \, \delta u(\mathrm{P})\, d\mathrm{S}. \tag{4}$$

Perchè I riesca minimo, sarà intanto necessario che

$$\delta \mathrm{I} = 0.$$

Ove si introduca nella (4), per $\delta u(\mathrm{P})$, l'espressione (3), e si invertano le integrazioni (ciò che è certo permesso, perchè la funzione sotto il segno diviene infinita appena di prim'ordine), si ha

$$\delta \mathrm{I} = -2 \int_\sigma \chi(\mathrm{Q})\, d\sigma \int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \} \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}.$$

Per l'arbitrarietà di $\chi(\mathrm{Q})$, la condizione $\delta \mathrm{I} = 0$ implica che si annulli il coefficiente della stessa $\chi(\mathrm{Q})$. Si ha quindi, *in ogni punto* Q *di* σ,

$$\int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \} \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})} = 0, \tag{5}$$

che è evidentemente una *condizione integrale per l'armonica viciniore* u, *equivalente a* $\delta I = 0$. Rileviamo subito che *la univoca determinazione di* u *in base a questa equazione rientra in un problema generale già risoluto dal Lauricella* [1]. Per essere completo, riprenderò brevemente al § 5 le considerazioni del Lauricella con referenza al caso particolare che ci interessa. Intanto ritengo acquisita la proposizione esistenziale e passo a rilevare alcune proprietà generali delle armoniche viciniori.

Formiamo in principio *il residuo*

$$U(P) - u(P) = \nu(P), \tag{6}$$

risguardandolo come densità di una ipotetica distribuzione newtoniana entro S.

Il primo membro della (5) si presenta allora come il corrispondente potenziale in Q; e il fatto che esso si annulla in ogni punto del contorno σ di S porta come necessaria conseguenza che esso sia ovunque nullo all'esterno. Di qua l'espressiva interpretazione meccanica: Il residuo spettante all'armonica viciniore dà luogo ad attrazione esterna nulla; in particolare, *condizione necessaria e sufficiente perchè la viciniore sia zero è che la funzione data* U, *attribuita quale densità ad* S, *lo renda corpo di attrazione esterna nulla.*

Osserviamo ora che, nella (4), $\delta u(P)$ designa un qualsiasi incremento (infinitesimo) di u, entro l'insieme $\mathfrak{S}$; attesa la linearità della (4) stessa, si può in sostanza risguardare δu come una funzione armonica arbitraria. Così la $\delta I = 0$, ossia

$$\int_S \{U(P) - u(P)\} \delta u(P)\, dS = 0, \tag{5'}$$

si presenta come una proprietà integrale dell'armonica viciniore u, dotata di ragguardevole generalità.

Una prima conseguenza interessante si ha ponendovi $\delta u = 1$; se ne desume allora che *il valore medio della funzione assegnata* U *coincide necessariamente con quello dell'armonica viciniore.*

Il carattere quadratico della espressione di I assicura, come è ben noto, che, per $\delta I = 0$, si ha un minimo assoluto. Possiamo constatarlo formando materialmente la differenza fra l'integrale I^*, corrispondente ad una generica funzione armonica u^*, e l'integrale I formato colla viciniore. Dacchè

$$(U - u^*)^2 = \{(U - u) + (u - u^*)\}^2,$$

ove si moltiplichi per dS e si integri, si ha identicamente

$$I^* = I + \int_S (u - u^*)^2\, dS + 2 \int (U - u)(u - u^*)\, dS.$$

[1] *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*, in questi Rendiconti, serie 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911, pp. 99-107.

L'ultimo integrale è zero, in virtù della (5'), nella quale si prenda $\delta u = u - u^*$. Risulta pertanto $I^* > I$, l'eguaglianza potendo sussistere soltanto per u^* coincidente con u, c. d. d.

Dalla (5'), ponendovi $\delta u = u$, si ricava quest'altro corollario: Il valore minimo di I relativo all'armonica viciniore può ritenersi espresso, oltre che da (1), anche da

$$(7) \qquad I = \int_S U(P) \{ U(P) - u(P) \} \, dS .$$

4. — Riduzione della (5') ad una equazione integrale di prima specie.

Introduciamo nella (5), al posto di $u(P)$, la sua espressione (2), avendo l'avvertenza di designare il punto corrente di integrazione con Q' e l'elemento superficiale circostante con $d\sigma'$, in modo da evitare ambiguità coll'altro punto Q, che compare nella (5) stessa. Ove si ponga

$$(8) \qquad N(Q, Q') = \int_S \frac{dS}{r(P, Q)\, r(P, Q')} ,$$

$$(9) \qquad V(Q) = \int_S U(P) \frac{dS}{r(P, Q)} ,$$

la (5) (con una inversione di integrazioni qui pure perfettamente legittima) assume la forma tipica

$$(10) \qquad \int_\sigma N(Q, Q')\, \mu(Q')\, d\sigma' = V(Q) \quad \text{(in ogni punto Q di } \sigma)$$

di equazione integrale lineare di prima specie nell'incognita densità $\mu(Q')$ dell'armonica viciniore u. Il secondo membro V(Q), da riguardarsi cognito a norma della (9), risulta dai valori superficiali del potenziale newtoniano che ha per densità, in ogni punto interno P, l'assegnata funzione U(P). Quanto al nucleo N, esso è manifestamente simmetrico, finito e continuo, ed è pur definito positivo, in quanto, per una qualsiasi funzione continua θ dei punti di σ, si ha necessariamente

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \, N(Q, Q')\, \theta(Q)\, \theta(Q') \geq 0 ,$$

l'eguaglianza potendo sussistere solo a patto che θ si annulli. Ciò risulta dall'osservare che, posto

$$\tau(P) = \int_\sigma \frac{\theta(Q)}{r(P, Q)} \, d\sigma ,$$

il primo membro della precedente disuguaglianza, in base alla espressione (8) di N, può essere scritto

$$\int_S \tau^2 \, dS .$$

Il suo annullarsi richiede $\tau = 0$ in tutto il campo S e in particolare su σ, il che basta ad assicurare, per ben note proprietà dei potenziali di superficie, che anche $\theta(Q) = 0$, c. d. d.

5. — Riduzione ad un problema biarmonico. — Verificazione della soluzione.

La determinazione della u, e, per essa, della densità μ, si è fatta dipendere dalla equazione integrale (10). Ma il problema non si può con ciò risguardare risoluto, poichè, allo stato attuale della teoria, bisognerebbe far capo alla condizione necessaria e sufficiente di Picard-Lauricella, la quale presuppone la conoscenza delle autofunzioni e degli autovalori del nucleo: circostanza questa che, almeno in generale, non si può certo ritenere acquisita per il nostro $N(Q, Q')$.

Giova pertanto riprendere la equazione caratteristica (5), completando la discussione per altra via. Cominciamo col generalizzare la posizione (9), riferendola ad un punto qualunque P′ dello spazio (sia interno che esterno ad S, od anche sopra σ). Accanto a questo potenziale di volume

$$V(P') = \int_S U(P) \frac{dS}{r(P, P')}, \tag{10}$$

che si può risguardare assegnato assieme con U, introduciamo l'analogo, avente per densità l'incognita viciniore u,

$$v(P') = \int_S u(P) \frac{dS}{r(P, P')}. \tag{11}$$

La (5) può così essere scritta

$$v(Q) = V(Q) \quad (\text{sopra } \sigma). \tag{5''}$$

Si tratta di due potenziali di masse distribuite entro σ, i quali coincidono in superficie. Ciò implica coincidenza in tutto il campo *esterno*. Ne discende in particolare che coincideranno le derivate secondo una direzione generica n, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dV}{dn}$, purchè prese dall'esterno, anche nei punti di σ. Siccome tali derivate non subiscono discontinuità attraverso σ, è indifferente di considerare i valori limiti dall'esterno o dall'interno, e si può quindi, pensando per es. a questi ultimi, e attribuendo a n il significato di direzione normale vòlta all'interno, associare a (5″) la sua necessaria conseguenza

$$\left(\frac{dv}{dn}\right)_Q = \left(\frac{dV}{dn}\right)_Q \quad (\text{sopra } \sigma). \tag{5'''}$$

Limitiamo oramai la considerazione dell'ausiliario potenziale v al campo interno S. Esso verifica in tale campo l'equazione di Poisson

$$\Delta_2 v = -4\pi u, \tag{12}$$

ed è quindi una funzione *biarmonica* ($\Delta_4 v = 0$), essendo armonica u. Al contorno si conoscono, in base alle ($5''$) e ($5'''$), i valori della funzione e quelli della sua derivata normale. La v ne rimane univocamente determinata. Ciò risulta con tutto rigore dalle ricerche di Fredholm e di Lauricella. Quest'ultimo ha infatti ricondotto la effettiva determinazione di v [1] ad un sistema di equazioni integrali di seconda specie, per cui si trovano soddisfatte le condizioni di univoca risolubilità del Fredholm.

Trovata v, si ha u dalla (12).

Verificazione. — È facile riconoscere *a posteriori* che la u così definita è effettivamente l'armonica viciniore. Partiamo all'uopo dalla nota formula che esprime una generica funzione v dei punti di S (finita e continua assieme alle sue derivate prime e seconde) mediante il $\Delta_2 v$ dei punti di S e i valori superficiali di v e di $\frac{dv}{dn}$. Applicandola alla nostra v, in base alle (12), ($5''$) e ($5'''$), potremo scrivere

$$v(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{S}} u(\mathrm{P}) \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')} + \mathrm{W}(\mathrm{P}'),$$

avendo posto per brevità

$$\mathrm{W}(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \mathrm{V}(\mathrm{Q}) \frac{d}{dn} \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')} - \left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)_{\mathrm{Q}} \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')} \right\} d\sigma .$$

Ora notiamo che (intendendo P′ entro S) V(Q) e $\frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')}$ considerate come funzioni dei punti Q *esterni* o appartenenti a σ, sono entrambe armoniche e regolari, e si annullano debitamente all' ∞. Perciò il teorema di Green, applicato a queste due funzioni nella regione esterna a σ, ci assicura che $\mathrm{W}(\mathrm{P}') = 0$. Rimane pertanto

$$v(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{S}} u(\mathrm{P}) \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')},$$

e così, in primo luogo, si ritrova la (11). Dopo ciò, riflettendo che la v verifica per costruzione la ($5''$), si è condotti alla voluta conclusione che l'armonica u fornita dalla (12) soddisfa alla originaria (5), equivalente a sua volta a $\delta \mathrm{I} = 0$, c. d. d.

6. — Campo sferico.

Sia R il raggio, e ϱ rappresenti la distanza di un generico punto P dal centro O. Per la costruzione della biarmonica v, giova servirsi anzitutto

(1) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 \mathrm{V} = 0$, in questi Rendic., serie 5ª, vol. XVI, 2° sem. 1907, pp. 373-383.

del lemma di Almansi [1], secondo cui ogni funzione biarmonica v, regolare entro la sfera S, si può mettere sotto la forma

$$v = (R^2 - \varrho^2)\,\varphi + \psi, \tag{13}$$

essendo φ e ψ due funzioni armoniche (pure regolari entro la sfera).

In ogni punto Q del contorno σ, v si riduce all'addendo ψ, talchè la (5″) fa conoscere direttamente i valori superficiali V(Q) di ψ, e la sua completa determinazione dipenderebbe dall'ordinario problema di Dirichlet. Ma il seguito della discussione mostrerà che non è necessaria per il nostro scopo l'esplicita valutazione di ψ. Deriviamo intanto la (13) rispetto a ϱ in un punto interno, e poniamo, a derivazione eseguita, $\varrho = R$, riferendoci in conformità a un generico punto Q di σ. Notando che, in Q, $\frac{d}{d\varrho} = -\frac{d}{dn}$, e badando alla (5‴), risulta

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -2R\varphi(Q) + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \tag{14}$$

che somministra i valori al contorno della seconda funzione armonica φ, però con intervento della $\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$. Ma è possibile di liberarsene. Ed ecco come.

Ricordiamo che V(P′) è funzione armonica del campo esterno a σ, mentre la ψ è stata or ora caratterizzata come l'armonica del campo interno che prende i medesimi valori superficiali. Ciò non implica naturalmente che si raccordino anche i valori delle rispettive derivate normali; ma, per la speciale forma sferica del campo, esiste fra questi valori una relazione locale assai semplice, rilevata dal Boggio [2]. Questa relazione, per le nostre ψ e V, può essere scritta

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} - \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = -\frac{1}{R}\,V(Q).$$

La (14) assume così l'aspetto

$$\varphi(Q) = -\frac{1}{R^2}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \tfrac{1}{2}V\right)_Q, \tag{14'}$$

col secondo membro dipendente soltanto da V e sua derivata normale.

Nota φ entro il campo S, il che implicherebbe ancora una volta risoluzione dell'ordinario problema di Dirichlet, dalle (12) e (13) si ha u sotto

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica*, Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tomo XLVII, 1897, pag. 111.

[2] Cfr. *Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa*, Rend. del R. Istituto lombardo, vol. XXXVII, 1914, pag. 125.

la forma

$$u = \frac{1}{\pi}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \tfrac{3}{2}\varphi\right). \tag{15}$$

Facciamo un ultimo passo, esprimendo i valori superficiali di u mediante V. All'uopo partiamoci dall'osservare che

$$\varphi^* = -\frac{1}{R^2}\left(\varrho\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \tfrac{1}{2}V\right) \tag{16}$$

è, al pari di V, una funzione armonica e regolare nel campo esterno alla sfera (che si comporta all'∞ come un potenziale). In superficie ($\varrho = R$), si ha, a norma della (14'), $\varphi = \varphi^*$. Applicando un'altra volta la ricordata formula del Boggio, si può esprimere il valore limite (dall'interno) di $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$, in un generico punto Q della superficie sferica σ, mediante il valore limite (dall'esterno) di $\frac{\partial\varphi^*}{\partial\varrho}$, e si ha precisamente

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\varrho} + \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = -\frac{1}{R}\varphi^*,$$

ossia, in base alla (16), e, ben si intende, ponendo $\varrho = R$ a derivazione eseguita,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{R^3}\left\{R^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}\right)_e + \tfrac{5}{2}R\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \tfrac{1}{2}V\right\}:$$

per maggior chiarezza ho scritto $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}\right)_e$, anzichè semplicemente $\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}$, onde mettere in evidenza che si devono considerare i valori limiti dall'esterno. (Per V e $\frac{\partial V}{\partial\varrho}$ è indifferente, attesa la continuità).

Facendo nella (15) $\varrho = R$ e portandovi al posto di $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ l'espressione testè ricavata e, al posto di φ, la (14'), abbiamo infine

$$u(Q) = \frac{1}{\pi R^2}\left\{R^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}\right)_e + R\frac{\partial V}{\partial\varrho} - \tfrac{1}{4}V\right\}_Q \quad \text{(sopra } \sigma\text{)}. \tag{17}$$

Riassumendo: per determinare l'armonica viciniore u, tutto è ridotto a procurarsi in primo luogo il potenziale newtoniano V che ha per densità l'assegnata funzione U. Mediante i valori di V e delle sue derivate normali prima e seconda sulla superficie sferica σ, si forma il secondo membro della (17), e si ricavano così i valori superficiali di u. Per avere u anche all'interno basta quindi applicare *una sola volta* la nota formula di Poisson.

Come controllo dell'esattezza materiale di questi passaggi di calcolo, possiamo verificare che, per $U = 1$, l'armonica viciniore u si riduce anche essa all'unità, come risulta dalla sua stessa definizione. All'uopo si nota che il potenziale esterno V di una sfera omogenea, di raggio R e densità 1, vale $\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 1/\varrho$. Si ha quindi, per $\varrho = R$,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^2 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\tfrac{4}{3}\pi R \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)_e = \tfrac{8}{3}\pi ,$$

con che il secondo membro della (17) diviene effettivamente $= 1$, e la u, essendo 1 in superficie, si conserva tale anche all'interno.

Si potrebbe verificare più generalmente (ricorrendo per es. allo sviluppo in serie di funzioni sferiche) che $u = U$ ogniqualvolta U è armonica.

Chimica agraria. — *L'azoto del gruppo cianico nella concimazione* [1]. Nota di R. Perotti, presentata dal Socio G. Cuboni.

Contributo alla determinazione del meccanismo d'azione dell'azoto cianico nella nutrizione vegetale e delle *condizioni* della sua utilizzazione — a partire da prodotti puri ed in relazione ai miei precedenti lavori sulla calciocianamide [2] — sono gli studi, di cui è oggetto la presente Nota.

In queste ricerche mi valsi del cianuro potassico, recentemente preparato dall'acido cianidrico gassoso e dalla potassa in soluzione alcoolica, che, al controllo di purezza, mi fornì i seguenti dati:

cm. 25 di soluzione all' 1 °/₀₀ del prodotto, precipitarono			
cmc. 3,72 di $Ag\,NO_3 \frac{N}{10}$	KCN °/₀₀	gr.	0,96
cmc. 25 della soluzione medesima, precipitarono			
cmc. 3.74 di $Ag\,NO_3 \frac{N}{10}$	»	»	0,97
Media	KCN °/₀₀	gr.	0,965
Umidità	»	»	0,026
Impurezze e perdite (K_2CO_3) .	»	»	0,009
Totale . . .		gr.	1,000

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio chimico e batteriologico della R. Stazione di patologia vegetale di Roma.

[2] Cfr. per i miei diciotto lavori sulla calciocianamide: Perotti R, *Alcuni caposaldi verso la naturale evoluzione dell'azoto cianamidico nel terreno e delle relative applicazioni nella concimazione agricola*, Staz. sperim. agrarie; 42 (1909), pag. 521.

Prima indagine fu di accertare che l'aggiunta delle sostanze nutritive non azotate alla soluzione di cianuro potassico non apportassero modificazioni alla forma di azoto scelta per allevarvi piante; ed a tale scopo, partendo dalla soluzione all' 1 °/₀₀ di KCN, per mille parti di essa, vi aggiunsi successivamente $KH_2 PO_4$ gr. 1 — $Mg SO_4 + 7 H_2O$ gr. 0,3 — $Ca Cl_2$ gr. 0,05 — $Na Cl$ gr. 0,05 — $Fe_2 Cl_6$ gr. 0,01 — glucosio gr. 2; e determinai nuovamento il cianuro, con il metodo della precipitazione del cianuro argentico, dopo l'aggiunta del fosfato (anal. 1), dopo l'aggiunta dei fosfati e dei cloruri (anal. 2) e, finalmente, una terza volta dopo aggiunto il glucosio (anal. 3). I risultati medî delle doppie determinazioni sono consegnati nel seguente prospetto:

Numero dell'analisi	(1) Soluzione nutritiva cmc.	(2) $Ag NO_3 \frac{N}{10}$ cmc.	(3) $CSN . NH_4 \frac{N}{10}$ cmc.	Differenza (2 — 3)	(4) KCN °/₀₀ gr.
1	25.0	15.0	13.51	1.49	*0.968*
2	25.0	15.0	13.55	1.45	*0.942*
3	25.0	15.0	13.62	1.38	*0.897*

L'influenza dell'aggiunta delle dette sostanze non è trascurabile, poichè il titolo del liquido in KCN va diminuendo, e notevolmente, dopo l'aggiunta del glucosio, e non ostante la presenza dei cloruri che precipitano una frazione, per quanto piccola, della soluzione argentica. Il cianuro, quindi, subisce lievi modificazioni, delle quali va tenuto conto per attribuire ai dati analitici un valore relativo a tali cause di errore, che aumentano con il tempo decorrente dalla preparazione della soluzione. D'altra parte, non era possibile rinunciare completamente al metodo analitico prescelto, che tuttavia permette *in qualche modo* di tenere dietro alla sorte del cianuro dei liquidi colturali.

In un secondo tempo mi proposi di ricercare fino a qual punto avessero influenza i diversi metodi di sterilizzazione su questi liquidi, per tentare eventualmente lo studio con colture pure.

La soluzione della composizione sopra riportata fu ripartita in tre palloni, uno dei quali fu sottoposto al riscaldamento in autoclave a 120° C. per 20 m¹; un secondo fu riscaldato in vapore d'acqua fluente per 20 m¹ e per tre giorni di seguito; il terzo fu pasteurizzato. Le determinazioni del cianuro nel liquido, sottoposto a ciascun trattamento e dopo ciascun giorno, figurano nel seguente quadro:

Numero e specifica dell'analisi	(1) Soluzione nutritiva cmc.	(2) $Ag\,NO_3 \frac{N}{10}$ cmc.	(3) $CSN.NH_4 \frac{N}{10}$ cmc.	Differenza (2 — 3)	(4) KCN °/₀₀ gr.
1 - Controllo	20.0	15.0	13.62	1 38	*0.89*
2 - m' 20 in autoclave a 120° C.	20.0	9.7	9.27	0.43	*0.14*
3 - m' 20 vap. fluente 1° risc.	20.0	10.0	9.30	0.70	*0.22*
4 - » » » 2° »	20 0	7.1	6.56	0.54	*0.17*
5 - » » » 3° »	10 0	4 8	4.57	0 23	*0.15*
6 - 2 h. a 55° C. 1° risc. .	20.0	10.0	8.80	1.20	*0.39*
7 - » » 2° » .	20.0	10.0	9.03	0.97	*0.31*
8 - » » 3° » ,	10.0	4.1	3.65	0.45	*0.29*

Adunque, la sterilizzazione in autoclave porta alla immediata totale scomposizione del cianuro, in quanto il precipitato argentico residuo non può esser dovuto se non ai clorури. Lo stesso grado di trasformazione del cianuro si raggiunge dopo il terzo riscaldamento in vapore d'acqua fluente, ma essa è quasi completa fino dal primo riscaldamento. Secondo quanto è noto, deve verificarsi la reazione

$$KCN + 2\,H_2O = NH_3 + H\,.\,COOK\,.$$

Soltanto alla pasteurizzazione resiste una certa proporzione del cianuro, che può aggirarsi intorno ad $^1/_3$ della quantità iniziale.

A nessuno di questi metodi di sterilizzazione era possibile quindi far ricorso nel mio studio in cui mi limitai a prendere le mosse dall'allestimento di colture brute.

Preparai pertanto cmc. 1000 di liquido colturale, corrispondente alla composizione del precedente; lo ripartii in cinque bevute, versandone in ognuna cmc. 200 ed aggiungendo KCN nelle proporzioni di 1, 0.75, 0.50, 0.25. La quinta bevuta, con cianuro all'1 °/₀₀, fu mantenuta sterile con l'aggiunta di poche gocce di cloroformio, mentre le altre quattro furono inoculate con gr. 0.2 di buona terra da giardino. Tutte si mantennero in termostato a 25° C.

Dopo 14 giorni, durante i quali lo sviluppo non fu macroscopicamente evidente in alcuna delle colture, procedei alla determinazione del cianuro nei liquidi, filtrandoli e riportandoli al primitivo volume. I risultati ottenuti furono i seguenti:

Liquido colturale	Cianuro potassico iniziale gr.	finale gr.
Controllo	0.88	*0.29*
I all' 1 °/₀₀ . . .	0.88	*0.26*
II al 0.75 » . . .	0 66	*0.21*
III » 0 50 » . . .	0.44	*0.15*
IV » 0.25 » . . .	0.22	*0.12*

Si deduce come nello stesso controllo il cianuro abbia subìto trasformazioni per le quali è stato ridotto alle proporzioni di circa $^1/_3$ del quantitativo iniziale. Lo stesso rapporto non è evidente nei liquidi colturali III e IV, dove, per la maggiore diluizione, il precipitato argentico è dato quasi esclusivamente da cloruri. In essi non vi era più traccia di cianuro.

L'azione microrganica non risultò pertanto *accertata* con la suesposta ricerca: essa era sospettabile, specialmente nel liquido III a media concentrazione di KCN. Volli ritenere che essa, da un lato, fosse ostacolata dall'azione antisettica del cianuro, dall'altro lato, non sufficientemente favorita dalla piccola dose di glucosio impiegata.

Preparai quindi due bevute con cmc. 500 ciascuna di liquido colturale, contenente cianuro di potassio soltanto in proporzione del 0.5 $^0/_{00}$ e glucosio nelle proporzioni del 20 $^0/_{00}$. Uno dei liquidi fu mantenuto sterile mediante cloroformio; l'altro venne inoculato con gr. 0.2 di terra da giardino.

In questo caso lo sviluppo fu evidentissimo, anzi rigoglioso, specialmente per ifomiceti. Dopo 14 giorni di coltura, raccolsi su filtro tarato e pesai la parte insolubile contenuta nelle bevute; mentre nel liquido determinai l'azoto totale. Ottenni i seguenti risultati:

Determinazioni	iniziali	finali nel controllo	finali nella coltura attiva
	gr.	gr.	gr.
Sostanza insolubile secca	0.1094	0.1094	*0.2790*
N nel liquido	0.058	0.058	*0.017*

Si dimostra, adunque, l'abbondante formazione di corpo organizzato, mentre la piccola quantità di azoto residuo nel liquido indica che una gran parte dell'azoto fu utilizzato nella formazione del corpo stesso. Ed invero, nella coltura, anche con produzione di gas, si ottenne il più attivo sviluppo di microrganismi di ogni specie.

La prova fu ripetuta, con lo stesso metodo, impiegando due differenti concentrazioni di KCN: 1 e 0.5 $^0/_{00}$. Questa volta si ottenne abbondante

sviluppo anche nel liquido più concentrato. Lo sviluppo fu evidentissimo *fin dalle prime 24 ore, con pronta diminuzione del titolo del liquido in* KCN, in confronto dei controlli.

In acconce condizioni colturali, adunque, e principalmente in presenza di una conveniente proporzione di materiale sorgente di energia, nel presente caso, di glucosio, svariate forme di microrganismi utilizzano nella nutrizione l'azoto del KCN. Questa utilizzazione richiede inoltre che il mezzo colturale non presenti un titolo in KCN tale da uccidere il materiale di innesto.

Nelle ordinarie condizioni del terreno, tale circostanza è facilmente realizzabile, mentre l'utilizzazione del gruppo cianico è *praticamente* cosa certa.

Se però tale utilizzazione sia dovuta ad un *diretto* attacco del protoplasma o delle sue secrezioni, od anche ad un attacco meno diretto per i prodotti delle sue reazioni vitali, con il mezzo ambiente, è questione che non può ancora con certezza risolversi e difficilmente, forse, potrà esserlo in seguito; poichè non si vede come possa scindersi l'eventuale fenomeno vitale dal fenomeno puramente chimico o fisico chimico che nel mezzo di sviluppo potrebbe portare alla trasformazione dell'azoto del gruppo $-C\equiv N$ sino allo stadio di azoto ammoniacale.

Mi sembra tuttavia lecito affermare fino da questo momento, come l'attacco diretto da parte del protoplasma del gruppo cianico sia molto probabile.

Patologia. — *Saggi farmacodinamici sottoepidermici.* A): *La prova della pituitrina.* B): *Prove cliniche.* Nota II dei professori Maurizio Ascoli ed Antonio Fagiuoli, presentata dal Socio Battista Grassi.

Proseguendo nel piano tracciato nella I Nota che abbiamo avuto l'onore di comunicare a quest'Accademia [1], riferiamo oggi brevemente sulla prova della pituitrina.

Praticando con le modalità già indicate una iniezione sottoepidermica (s. e.) di 0,05 cmc. di pituitrina (Parke e Davis), si determina la comparsa di un ponfo alabastrino, attorno al quale si va tosto formando un alone bianco che cresce man mano di intensità e di estensione; l'alone bianco si circonda a sua volta di un alone rosso, variabile per ampiezza e intensità di colorito. La reazione raggiunge, solitamente entro mezz'ora, il suo completo sviluppo, dopodichè lentamente regredisce, di regola entro un paio d'ore, e ne residua una piccola macchia rossa che dura uno o più giorni.

La reazione s. e. alla pituitrina collima dunque con quella offerta da diluizioni di adrenalina allo 1/200,000 circa. In condizioni ordinarie essa riesce ancora evidente — pur ritardando la comparsa del proprio elemento

(1) Atti R. Accad. dei Lincei, vol. XXVIII, serie 5ª; 1° sem., fasc. 12.

caratteristico, cioè dell'alone alabastrino attorno al ponfo – quando si allunghi fino a 500 volte circa il contenuto di una fialetta. Con soluzioni più diluite la reazione si attenua fino a diventare identica a quella *indispensabile* di controllo con l'acqua (vedi Nota I) (¹).

S'è detto che soluzioni allo 1/200,000 di adrenalina offrono una reazione d'intensità approssimativamente uguale a quella della pituitrina non diluita; s'è visto inoltre che, mentre l'azione delle prime quasi si esaurisce ove si diluiscano ulteriormente appena cinque volte ancora (1/1,000,000), le seconde, pure allungate fino a 500 volumi, mantengono ancora la loro speciale azione. La causa del contrasto è forse da ricercare nel diverso punto del tragitto neuromuscolare sul quale i due farmaci sembrano intervenire: giunto neuromuscolare nel primo, fibra muscolare nel secondo caso.

***

Il saggio sottoepidermico (s. e.), a rigor di termini, ci indica soltanto la suscettibilità del tratto di cute in cui fu praticata l'iniezione. È lecito, fino a un certo punto, dal risultato giudicare per illazione della suscettibilità della cute in genere del soggetto, constatazione certo non priva d'interesse dal punto di vista clinico. Altra questione è, poi, se e quanto questa sensibilità parziale vada generalmente di paripasso con quella complessiva dell'organismo verso i singoli farmaci, quesito questo che solo una larga esperienza clinica può risolvere.

Consegniamo oggi alcune osservazioni raccolte in questo senso. La reattività alla prova s. e. all'adrenalina in condizioni ordinarie risulta solitamente compresa fra le diluizioni al 200,000 ed al 1,000,000. Passando a saggiarne la sensibilità in condizioni patologiche, abbiamo trovato ch'essa può scartare dai limiti cennati sia per eccesso sia per difetto. Così ci è risultata subnormale (cioè positiva soltanto con diluizioni al 50,000-100,000) in qualche caso di morbo di Addison (1 su 2), e di iposurrenalismo cronico in tubercolosi (2 su 3); aumentata (cioè positiva fino a 5-20 e più milioni) in alcuni casi di disturbi della menopausa (3 su 5), di ipertensione pura (4 su 7), di morbo di Flajani-Basedow (3 su 4), in qualche gravida (3 su 9, tutte fra il 6° ed il 9° mese). Per quanto concerne l'età in rapporto alla reazione, abbiamo trovato che i lattanti reagiscono debolmente, e così pure i vecchi. Nulla, *anergica*, la reazione negli stati di anemia profonda.

Ci siamo ancora proposti di ricercare quale rapporto esista fra la ridu-

(¹) La esecuzione della prova contemporanea di controllo con l'acqua distillata non è *mai* da pretermettere. Solitamente essa presenta il tipo già da noi descritto. Talora si osservano però reazioni anomale che bisogna conoscere: così talvolta il ponfo si mantiene alabastrino per lungo tempo (fino a 60-90'); così può, eccezionalmente, presentarsi il fenomeno della cute anserina od un tenue e ristretto alone bianco attorno al ponfo. La quantità di liquido introdotto, la profondità dell'iniezione hanno pure importanza e van tenute in debito conto. La durata d'involuzione della papula rossa residuale, solitamente nelle 48 ore, è pure variabile. All'opposto delle iniezioni sottoepidermiche di adrenalina al millesimo e di pituitrina come tale, che riescono quasi indolori, le diluizioni maggiori e l'aqua suscitano dolore.

zione, rispettivamente l'esaltazione della reazione s. e., e la sensibilità dello stesso organismo verso le iniezioni sottocutanee (s. c.). In 23 casi la iniezione s. c. di $^1/_2$-1 mgr. di adrenalina non provocò alcun disturbo apprezzabile, e corrispondentemente in 21 di essi la reazione s. ep. oscillò nei limiti consueti; negli altri due invece la reazione s. e. apparve indebolita. In uno di questi infermi, che presentava postumi di pleurite bilaterale, cute discretamente pigmentata, bassa pressione arteriosa, si ottenne debole reazione s. e. con diluizioni di adrenalina al 50,000; nel secondo, affetto da morbo di Addison, con diluizioni al 100,000.

In due pazienti (affetti l'uno da insufficenza aortica di origine luetica, l'altro da morbo di Flajani-Basedow), nei quali la iniezione s. c. di 1 mg. di adrenalina ebbe per unico effetto un lieve aumento (di 10, rispettivamente di 15 mm. di mercurio) nei valori della pressione arteriosa, comparve una esagerata reazione alla prova s. e., positiva nel primo sino alla diluizione di 10,000,000, nel secondo sino a quella di 30,000,000.

Finalmente in un caso di sclerodermia morfea in ipertesa (A. P., d'anni 68; lesioni sclerodermiche sparse irregolarmente, specie alla faccia ed alle mani; press. art. 195 mm. Hg Riva Rocci; reagì alla iniezione s. c. di $^1/_2$ mgr. di adrenalina con aumento di pressione, tachicardia, tremore, dispnea, vertigini, tracce di glicosuria), si osservò normoreazione alla prova s. e. (nei tratti non lesi).

La corrispondenza dei risultati fra la prova s. c. e quella s. e. risulta pertanto notevole nelle nostre investigazioni, facendo difetto in un sol caso, nel quale l'affezione interessava per l'appunto la cute. Gioverà moltiplicare queste prove di confronto particolarmente in condizioni morbose.

Per quanto riguarda la pituitrina, il limite di reattività alla prova s. e in soggetti normali oscilla intorno alle diluizioni al 500. La reazione si è presentata rinforzata (cioè positiva anche a diluizioni al 1000 e superiori) in affezioni dell'ipofisi (positiva in un caso di nanismo ipofisario ed in uno di eunucoidismo; negativa in un caso di distrofia adiposo-genitale e in altro di adenoidismo ipofisario), in un caso (su 2) di morbo di Flajani-Basedow; ridotta in qualche caso di iposurrenalismo cronico (in 1 di 6 casi, tutti affetti da tbc. polin.).

Un punto meritevole di essere approfondito, data l'identità del quadro delle due reazioni, era quello dei rapporti che corrono fra di esse: cioè se alle deviazioni dalla norma dell'una corrispondano deviazioni, nello stesso senso, dell'altra. Abbiamo rilevato in proposito che, se talora può esistere coincidenza fra la esaltata o ridotta capacità di reazione all'adrenalina ed alla pituitrina, altre volte le loro reazioni patologiche posson manifestarsi *nettamente dissociate e perfino opposte.*

I risultati ottenuti in queste prove di orientamento incoraggiano ad estenderle ed indicano la possibilità di applicazioni alla pratica clinica.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

I Soci Versari, relatore, e Grassi, riferiscono sulla Memoria del prof. Sera: *Sui rapporti della conformazione della base del cranio colle forme craniensi e colle strutture della faccia nelle razze umane.* La relazione conclude col proporre, con alcune riserve, la inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Tale conclusione è approvata dalla Classe, salvo le riserve consuete.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrisp. Leonardi-Cattolica legge la seguente Commemorazione del Socio G. Dalla Vedova:

La morte del Socio Giuseppe Dalla Vedova, professore emerito dell'Università di Roma e senatore del regno, avvenuta il 21 settembre scorso, ha segnato un grave lutto per la scienza e particolarmente per la geografia.

Di quanto affetto ed ammirazione fosse circondato il maestro, la cui figura esile e pensosa, come giustamente ha osservato un suo recente biografo, ricordava Giuseppe Mazzini, lo provano i due volumi pubblicati in suo onore dai suoi numerosi discepoli ed amici. Il primo, edito nel 1908, in occasione del suo 50° anno d'insegnamento, è una raccolta d'autori diversi, sulla geografia e sulla storia della geografia; il secondo, edito nel 1914, fu offerto al maestro nella ricorrenza del suo 80° anno di età e contiene la maggior parte dei suoi scritti geografici, pubblicati nei 50 anni che corrono dal 1863 al 1913.

Anche all'estero i meriti del Dalla Vedova vennero riconosciuti ed apprezzati.

Le principali Società geografiche lo vollero iscritto nei loro albi, e nel 1907 il famoso *Calendario di Gotha* ne decretò la posizione nel mondo geografico, pubblicando la sua biografia dettata da Filippo Porena, dopo di avere nei quattro numeri precedenti pubblicate quelle del Richthofen, del Markham, del Reclus e del Semenof: il che vuol dire che, come questi uomini insigni erano considerati i maggiori rappresentanti della geografia nei loro rispettivi paesi (Germania, Inghilterra, Francia e Russia), così il Dalla Vedova lo era nell'Italia.

***

Non a me certamente sarebbe toccato l'onore di questa commemorazione, se l'Accademia, qualche mese dopo la morte del Dalla Vedova, non fosse stata colpita da un'altra e non meno dolorosa perdita.

Chi, infatti, meglio di Elia Millosevich, che fu allievo del Dalla Vedova, che per un lungo periodo e con lo stesso ardore collaborò con lui alla Società geografica italiana, che ne fu ammiratore e biografo, che ad una profonda e vasta cultura univa la parola forbita, chi meglio del Millosevich, dico, avrebbe potuto parlarvi dello scienziato e dell'uomo? Modesto cultore di discipline nautiche e di astronomia geodetica, so di non avere la competenza specifica per un tal còmpito; e non avrei osato di accettarlo, se una considerazione non mi facesse sperare che nell'assolverlo non mi mancherà la vostra benevola indulgenza.

In parecchie pubblicazioni (tra cui citerò: *I marinai dell'Adriatico nelle regioni polari*; *Cenni storici sulle esplorazioni artiche*; *I progressi della geografia nel secolo XIX*; *L'oceanografia*; *Giacomo Bove*; *I recenti lutti della Società geografica italiana*) il Dalla Vedova ha illustrato con grande amore le benemerenze di non pochi uomini di mare, nel campo della geografia. Per questo è parso a me non inopportuno che un marinaio, che ha l'onore di sedere tra voi, ricordasse con sentimento di viva gratitudine, se pure con scarsa autorità, l'opera del nostro compianto Socio, alla cui memoria egli è legato anche da un recente ricordo.

Nello scorso agosto, aderendo alla mia preghiera, il professore si era impegnato di mandarmi un pensiero augurale per una rivista marittima d'imminente pubblicazione. Lo scritto, che dopo il suo decesso mi fu con gentile pensiero consegnato dal figliuolo prof. Riccardo, dimostra che, quando la mano del maestro vergò quei frammenti, la mente era già alquanto annebbiata dal male che lo trasse alla tomba; ma rivela pure che anche negli ultimi giorni il mare, con la sua grandiosità, con la sua bellezza, coi suoi tesori e con i suoi segreti, esercitò una forte suggestione sullo spirito del geografo.

***

Giuseppe Dalla Vedova nacque nel 1834 a Padova, e vi compì gli studî classici secondarî; fece gli studî superiori all'università di Vienna, dove ebbe per maestro Federico Simony, valoroso geologo e geografo. Cominciò ad insegnare geografia, nel 1858, al ginnasio di Santa Caterina, oggi Marco Foscarini, di Venezia. Passò poscia al ginnasio-liceo di Padova e nel 1872 fu nominato straordinario di geografia in quell'università. Tre anni più tardi il Bonghi, ministro della pubblica istruzione, lo chiamò a Roma e gli affidò la direzione del museo d'istruzione e di educazione, che, fondato dallo stesso Bonghi e dal Finali, ministro di agricoltura, industria e commercio, ebbe disgraziatamente brevissima vita.

Nel 1878 il Dalla Vedova fu promosso ordinario nell' Università di di Roma, ne fu rettore e per due volte fu membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione.

Era accademico dei Lincei dal 1903, senatore dal 1909.

Fin dal 1877 egli era stato nominato segretario generale della Società geografica italiana, che, fondata a Firenze nel 1867, erasi trasferita con la capitale, a Roma. Il Dalla Vedova tenne quell'ufficio per 19 anni; ma la sua influenza sullo andamento della Società geografica si protrasse per altri dieci anni, perchè, dopo aver rinunziato a quel posto, fu per cinque anni segretario onorario e per altri cinque anni presidente della Società stessa.

*
* *

All'epoca in cui il Dalla Vedova cominciò ad esplicare la sua attività scientifica (il suo primo lavoro è del 1863), il livello degli studî geografici in Italia era così basso da giustificare quello che un distinto geografo, Vivien de Saint Martin, aveva affermato nell'*Année géographique* del 1863: che, cioè, nel movimento scientifico geografico, l'Italia non contava nulla.

Pochi, infatti, erano al corrente di quel movimento e seguivano i progressi fatti dalla geografia, specialmente in Germania: da noi questa disciplina, non ancora individuata nei suoi fini e nei suoi metodi, era tenuta in poco conto, e, mentre nelle scuole inferiori si riduceva ad un'arida descrizione dei luoghi e ad un elenco di nomi e di cifre, nelle scuole superiori, quando non invadeva il campo delle scienze naturali, era considerata materia ausiliaria.

*
* *

L'azione che il Dalla Vedova esercitò dalla cattedra e con gli scritti, a vantaggio della geografia, fu la più benefica che potesse desiderarsi, perchè non si svolse nel campo astratto, ma in quello dei bisogni immediati della scuola e della vita; e questo spiega altresì perchè la sua produzione scientifica, anzichè da poche e complesse opere, sia rappresentata da numerose Memorie, articoli e relazioni riguardanti argomenti diversi. Come ho già detto in principio, gli scritti geografici del Della Vedova furono ripubblicati nel 1914 in un unico volume nel quale, a seconda del loro carattere, sono divisi in quattro gruppi, così distinti:

Metodologia e didattica geografica; Storia della geografia e geografia storica; Esplorazioni e viaggi in Africa; Commemorazioni.

I lavori che ebbero maggior peso sul rinnovamento degli studî geografici sono naturalmente quelli del primo gruppo: farò speciale menzione dei tre più importanti.

L'articolo *La geografia ai nostri giorni*, pubblicato nel 1873 nella *Nuova Antologia*, è un quadro completo di quanto fino allora era stato fatto nel campo della geografia in tutti i paesi civili, per opera dei Governi, delle associazioni e dei privati.

Secondo il Dalla Vedova, la geografia, nella concezione moderna, non deve limitarsi a descrivere i luoghi ed i loro prodotti, ma deve esaminare i fatti nelle loro cause e nei loro vicendevoli rapporti per determinare le

funzioni speciali di ogni regione. Per soddisfare a questo còmpito, la geografia raccoglie da quasi tutte le altre scienze le dottrine più utili alle generalità delle persone e le collega in un sistema razionale, diventando in tal modo l'intermediaria tra la scienza e il popolo.

Lo studio della geografia locale è l'argomento di una conferenza tenuta nel 1876 al museo d'istruzione e di educazione.

Vi sono esposte le ragioni per le quali l'insegnamento della geografia nelle classi elementari deve procedere dal particolare al generale, anzichè seguire l'ordine contrario, come fino ad allora si praticava. Si mettono in evidenza i vantaggi dello studio della geografia locale, e si dimostra come soltanto prendendo a base questo studio sia possibile di fissare intuitivamente, misurare e ordinare ragionevolmente le cognizioni di fatto del mondo materiale e morale, necessarie alla scuola popolare.

Il concetto scientifico e popolare della geografia è il tema trattato all'università di Roma nel discorso inaugurale dell'anno accademico 1880-81.

Nella prima parte il Dalla Vedova ribadisce il concetto popolare della geografia, la quale, nelle scuole elementari, ha due notevoli uffici: uno sta nell'importanza pratica delle cognizioni; l'altro è quello di costituire un vincolo facile e razionale, atto a riassumere e connettere i capisaldi degli studî naturali fra loro ed in un tutto coi sociali.

Nella seconda parte del discorso l'oratore si occupa dello studio della geografia nella università; e dopo aver notato che, al pari di tutte le altre scienze, essa vi trova il doppio còmpito di formare i maestri e promuovere la scienza propriamente detta, si domanda se veramente esista una scienza geografica.

Per rispondere al quesito, il Dalla Vedova ricorda i progressi degli studî metodologici della geografia, di cui precisa l'oggetto e il fine: *oggetto* è la superficie del nostro pianeta, nelle sue forme, nei suoi caratteri e nella distribuzione dei suoi fenomeni; *fine* è la ricerca del *nesso casuale geografico*, cioè la sintesi delle azioni e delle reazioni dei rapporti di ogni specie da cui dipendono, a cui si presta la loro distribuzione locale. Osserva che le scienze speciali hanno soppresso nello studio l'unità materiale e ideale della terra, che è poi il loro vasto campo d'indagine, donde la necessità di una scienza che riassuma tutti quegli ordini di fatti sotto un unico aspetto, secondo il loro posto e la loro distribuzione sulla faccia del globo; e questa è la geografia scientifica, che può dividersi in due rami: *morfologia geografica* e *biologia geografica.*

Questo discorso del Dalla Vedova, notevole per dottrina e originalità, che rivela il progresso avvenuto dal 1873 al 1880 nel modo in cui egli concepiva la dottrina professata, è commentato dal Porena con queste parole: « e così l'Italia, entrata l'ultima nel dibattito sorto per definire il carattere scientifico della geografia, disse per merito del Dalla Vedova la più conclusiva parola ».

Quanto finora ho detto si riferisce ai meriti scientifici e didattici del Dalla Vedova; ma vi è un'altra parte non meno importante della sua opera che devesi lumeggiare, ed è quella dedicata per quasi un trentennio alla Società geografica italiana, al cui servizio egli mise non solo le sue eccezionali qualità tecniche di geografo, ma altresì quelle di consigliere e di amministratore.

Egli diede al Bollettino e alle Memorie della Società un continuo e prezioso contributo anonimo, studiò i programmi delle spedizioni promosse dalla Società, raccolse il materiale informativo delle regioni da esplorare; diede istruzioni e suggerimenti a un grande numero di viaggiatori, dettò prefazioni a relazioni di viaggi, disegnò carte e si fece — come si è visto — narratore di quelle esplorazioni degli italiani nel continente nero, che costituiscono una pagina gloriosa della nostra storia e contribuirono potentemente a convincere l'opinione pubblica della necessità, anche per l'Italia, di avere uno sviluppo coloniale.

Per tutti questi titoli e per altri, che per brevità ometto, la Società geografica italiana decretò al Dalla Vedova la grande medaglia d'oro.

Con la pubblicazione *La Società geografica italiana e la sua opera nel XIX secolo*, il Dalla Vedova ci ha dato la storia della Società e della sua attività dall'epoca della sua fondazione fino al 1900.

Fra le commemorazioni lette in questa Accademia, ricorderò quelle dei geografi Richthofen, Fischer e Hughes, e quella memorabile di Cristoforo Colombo, nel IV centenario della sua morte, in cui il Dalla Vedova dimostrò quanto poco serie fossero le critiche mosse da taluni contro la cultura, contro le qualità morali e contro l'originalità dell'impresa del grande ligure.

La fama del Dalla Vedova, come si è visto, era definitivamente stabilita molti anni prima che egli mancasse ai vivi; ma non è senza interesse il rilevare che tutti gli eminenti geografi che si sono pronunziati sulla sua opera, da Filippo Porena nel 1907 a Luigi Filippo De Magistris, a Cosimo Bertacchi, infine a Roberto Almagià (che nello scorso gennaio ha commemorato il suo maestro, al quale è succeduto sulla cattedra universitaria), sono pienamente concordi nel proclamare Giuseppe Dalla Vedova il principale riformatore della geografia in Italia, per avere più di ogni altro contribuito ad elevare quella dottrina e a darle il carattere scientifico e etico che le spetta.

Dieci anni or sono il Dalla Vedova, commemorando un suo illustre collega, Giovanni Marinelli, esordiva con queste parole: « quando l'età declina e per richiami sempre nuovi si desta nell'animo il pensiero che non sia molto lontana la fine, è di gran sollievo la speranza che il frutto delle vostre fatiche non si dileguerà insieme con le vostre forze, con voi, ma che, dopo di voi, esso troverà chi lo raccolga, chi lo apprezzi, chi lo fecondi e lo perpetui ».

Giuseppe Dalla Vedova ha avuto la suprema soddisfazione di constatare che, per lui, tale speranza era certezza, imperocchè i suoi degni discepoli custodiscono religiosamente la sua eredità scientifica per tramandarla accresciuta, ed alla sua memoria si rivolge l'omaggio riverente e grato non solo degli uomini di studio, e particolarmente dei cultori della geografia, ma di tutti gli italiani, perchè Giuseppe Dalla Vedova assolse nobilmente il più alto degli apostolati: quello di insegnare a conoscere, ad amare e ad onorare la patria.

Il Corrisp. Baglioni, legge la seguente Commemorazione del Socio L. Luciani:

Nacque Luigi Luciani in Ascoli Piceno il 23 novembre 1840 da Serafino Luciani e da Aurora Vecchi. La madre, per la quale ebbe tenerissimo affetto e devozione, della nobile famiglia Vecchi di Fermo, fu sorella del noto scrittore e grande patriotta Candido Augusto Vecchi.

Ebbe l'istruzione elementare in patria da un maestro privato, e l'istruzione media presso i gesuiti, acquistando già fin da allora notorietà, tra i condiscepoli, di intelligente e studioso.

Nel 1860, terminati gli studî medii, avrebbe potuto accedere ad una Università, ma (lasciò scritto in un'autobiografia inedita) « i rivolgimenti « politici e le idee nuovissime, che allora entrarono in circolazione, colpi- « rono ed attrassero sì vivamente tutto il mio spirito, che rimasi in patria « altri due anni ad occuparmi di politica, di letteratura ed in specie di « filosofia. Il mio temperamento mi faceva prediligere quest'ultima; io in- « fatti sono portato a rendermi conto e dominare le impressioni del mondo « esterno, più che a subirle a lungo e contemplarle in astratto ».

Il motivo più forte per l'interruzione degli studî fu piuttosto la ristrettezza economica della famiglia. Tentò in quell'epoca persino un concorso a segretario comunale, che fortunatamente non vinse.

Nel novembre del 1862, « ripiena la mente della *critica della ragion pura* », potè recarsi a Bologna; percorse con ardore in quella Università il primo bienno degli studî medici, e, dopo aver frequentato il terzo anno nella Università di Napoli, a Bologna completò il corso medico sino alla laurea e fece le prime armi nella spinosa carriera della scienza e dell'insegnamento.

Per un anno e mezzo fu proassistente nella clinica oculistica del Magni.

Laureatosi nell'estate del '68, nel novembre dello stesso anno fu incaricato delle funzioni di operatore nel laboratorio di fisiologia a Bologna, diretto dal Vella; nell'ottobre del '69 fu nominato operatore effettivo, e poi fu più volte confermato in questa qualità fino al novembre del 1874.

Dal marzo del 1872 fino al novembre del '73 soggiornò a Lipsia presso l'Istituto fisiologico del Ludwig.

Tornato a Bologna e ottenuta la libera docenza in patologia generale, fu nel 1873 incaricato di un corso straordinario di patologia sperimentale. Nel 1875 fu nominato professore straordinario della cattedra di patologia generale nella R. Università di Parma; dall'80 all'82 fu professore di fisiologia a Siena; dall'82 al 93 a Firenze; dal 93 al 1917 a Roma, dove, professore emerito, il 23 giugno 1919, si spense, dopo lunga e penosa malattia del sistema urinario, sopportata con filosofica rassegnazione, in mezzo al compianto dei parenti, della famiglia medica e della scienza italiana.

Dal 1895 Socio nazionale di questa R. Accademia dei Lincei, che nel 1891 gli aveva conferito il massimo premio reale per la sua *Fisiologia del cervelletto*; per due quinquennii eletto al Consiglio superiore dell'istruzione; dal 1905 senatore del Regno; dal 1902 Socio nazionale della Società italiana delle scienze detta dei XL; per due anni (1898 e 1899) eletto rettore della R. Università di Roma; insignito delle più alte onorificenze. Moltissime Accademie nazionali e straniere ambirono averlo Socio: tra le prime, oltre le suddette, la R. Accademia medica di Roma (di cui fu vice-presidente), le RR. Accademie di Torino, di Napoli, dei Georgofili di Firenze; il R. Istituto Veneto; tra le seconde, l'Accademia Leopoldino-Carolina, la R. Accademia medica del Belgio, la società nevrologica di Londra, la Società di medicina di Vienna, l'Accademia di Scienze di Gottinga, di Amsterdam, e, su tutte, la massima Società Reale di Londra.

L'opera del Luciani si è svolta quasi esclusivamente nel vasto e difficile campo delle scienze biologiche e mediche, nelle quali ha tracciato orme di sommo scienziato e di sommo maestro.

La serie delle sue Memorie s'inizia con una pubblicata nel 1864, intitolata « Del plasticismo organico comparativo ». Scritta al 2° anno dei suoi studî di medicina, fu da lui sottoposta all'esame di Giovanni Franceschi (insegnante materia medica nell'Università di Bologna), in forma di manoscritto. Il Franceschi la trovò degna di farla stampare ad insaputa dell'autore.

In questa Memoria dimostrava di conoscere tutte le più recenti ricerche e dottrine di fisiologia generale, che acquistava dalla lettura dei libri più che dall'insegnamento dei suoi maestri; e vi erano già i primi segni del suo acume critico e filosofico.

La prima Memoria di argomento strettamente fisiologico è un sunto (oggi si direbbe rivista critica) di una Memoria di G. B. Ercolani « sui tessuti e gli organi erettili ». In essa (1869) è il primo accenno della dottrina dell'allungamento attivo degli elementi contrattili, ed è notevole che (trent'anni prima del Verworn) riconobbe nei movimenti delle amebe un fatto di analogia in appoggio a tale dottrina.

Il primo e più importante frutto del periodo della vita scientifica, che (come egli scrisse) segna il passaggio fra gli studi puramente sui libri e le ricerche sperimentali di laboratorio, sono le due Memorie « dell'attività della diastole cardiaca » (1871) e « dei fenomeni cardiaco-vascolari della febbre e della infiammazione » (1872).

La prima, che dedicò alla memoria di Giovanni Alfonso Borelli (« iniziatore della medicina meccanica e matematica, che fu la scuola dell'avvenire, ma che già comincia ad essere del presente ») e che più tardi (vol. I, nel Trattato di fisiologia) segnalò « come primo atto della sua carriera scientifica, che alcuni giudicarono con eccessiva indulgenza ed altri condannarono con soverchia precipitazione », è un'entusiastica difesa della dottrina dell'attività diastolica, fondata su alcuni esperimenti rudimentali.

Dopo aver introdotto un trequarti collegato con una cannula di vetro orizzontale aperta all'estremità, dalla punta del cuore nell'interno di un ventricolo, in un cane a torace aperto, osservava ad ogni sistole un getto di sangue e ad ogni diastole il corso retrogrado del sangue lungo la cannula. Quest'ultimo fatto dimostrava un'aspirazione diastolica, la quale si accresceva visibilmente, sia impedendo, mediante una pinza a pressione applicata alle pareti dell'atrio, l'effetto pressorio della discesa del sangue dall'atrio nel ventricolo, sia provocando il rallentamento dei battiti cardiaci colla stimolazione del vago. Un'altra serie di esperimenti ottenne riempiendo di latte la cavità pericardica, che metteva in comunicazione con un tubo di vetro orizzontale munito di un indice liquido. Osservava, così, che, durante la diastole, aumentava il volume totale del cuore; questo aumento diveniva molto maggiore quando stimolava leggermente il vago.

Da questi esperimenti dedusse: *La diastole non è l'effetto della pressione venosa e della sistole auricolare: non è prodotta dal passivo rilasciamento della musculatura cardiaca, ma dipende, come la sistole, da un movimento attivo della medesima.*

La sistole dipende dalla contrazione del miocardio, e la diastole dalla estensione fisiologica del medesimo.

All'argomento dell'attività diastolica ebbe occasione di dedicare in seguito una Rivista fisio-patologica (1874) e una risposta polemica alla critica di Mosso e Pagliani (1876).

Non è il caso di fare qui la storia di questa dottrina. Possiamo solo ricordare che essa oramai, meglio dimostrata da esperimenti più perfetti e decisivi (per opera specialmente di A. Stefani) (1), in una forma più esatta e concreta, è ammessa da tutti i fisiologi ed ha trovato applicazioni nella patologia cardiaca (2).

Giungiamo così al periodo, che segna una vera svolta nella sua vita scientifica.

(1) Cfr. A. Stefani, *Contributi alla fisiologia del cuore e dei vasi*, Memoria, R. Accad. dei Lincei, vol. XI, fasc. 12, an. 1916.

(2) Cfr. E. Ebstein, *Die Diastole des Herzens*, Ergebnisse der Physiologie, III, 2ª sez., 1914, pp. 123-194.

« Dal principio di marzo 1872 fino al novembre '73 pur conservando la mia qualità di assistente il fisiologia a Bologna, ebbi campo di recarmi a Lipsia per attendere a studî sperimentali presso l'Istituto fisiologico dell'illustre prof. Ludwig. Questa mia andata in Germania segna l'epoca principale della mia vita scientifica, perchè ha lasciato nel mio spirito traccie profonde e incancellabili. Per un sentimento di gratitudine e di giustizia che non si estinguerà mai, io riconosco in Ludwig il *mio vero maestro* ».

Per intendere l'importanza della metamorfosi allora subìta dal Luciani, è necessario far presente il periodo storico della scienza fisiologica e, più che fisiologica, medica italiana contemporanea. Dominavano e si contendevano il campo due opposti sistemi di medicina, che per mezzo secolo tennero occupati maestri e discepoli: la dottrina del Rasori, derivazione dell'eccitabilismo inglese di G. Brown, e la dottrina del Bufalini che riuscì a scalzare la prima e a sostituirla. Gli effetti di questi due sistemi furono di eccitare il gusto alle polemiche e disquisizioni astratte, deviando le menti dal modesto ma fruttuoso lavoro della ricerca scientifica, dell'esperimentazione fisiologica. Fu allora una deplorevole lacuna, una fermata nella produzione fisiologica paesana, per cui rischiammo di smarrire le nobili tradizioni di Galvani, Spallanzani, Fontana, Rolando, Panizza.

Col nostro risorgimento politico coincide presso a poco il risorgimento della fisiologia italiana. Salvatore Tommasi riconobbe e diffuse la superiorità dello sperimentalismo, pur non producendo praticamente frutti di ricerca sperimentale: Matteucci, Maurizio Schiff, Moleschott, Oehl, Albini, Mantegazza, Albertoni (quasi tutti questi ultimi reduci dalla scuola tedesca), rappresentano col Luciani la schiera dei moderni sperimentatori italiani nel campo delle scienze mediche.

Si riprese così la via luminosamente aperta due secoli prima da Galileo, Realdo Colombo, Cesalpino, Redi.

La mente del Luciani, che tendeva per naturale inclinazione alla speculazione filosofica, alimentata dall'ambiente e dagli studî preferiti, al contatto dello spirito pratico e scettico del fisiologo tedesco doveva naturalmente risentire il più benefico effetto. Si fusero le tendenze e qualità filosofiche con i frutti e le esigenze della severa scienza sperimentale, fusione la quale non concede nè ammette affermazioni senza la salda base dei fatti rigidamente osservati e, per prove e riprove, cimentati e controllati.

Riconosciuta così nella sua origine la metamorfosi di questo grande ingegno e tenendo presente l'indomita ed instancabile sete di ricerca scientifica, è facile spiegare la grande importanza degli studî successivi e della sua opera informatrice di scienziato e di maestro.

La scoperta che egli fece nel laboratorio di Ludwig, nota col nome di « fenomeno del Luciani », si riannoda agli studi sulla fisiologia generale del cuore, intrapresi da Stannius, che culminavano nella questione circa

le cause determinanti l'attività automatica cardiaca, se cioè questa fosse miogena o neurogena. Il merito del Luciani consiste nell'aver dimostrato che, ripetendo gli esperimenti dello Stannius, si ottengono gli stessi fenomeni da esso descritti, facendo la legatura anche dopo aver introdotto nel cuore di rana una cannula semplice, la cui punta sporga nel ventricolo (ossia l'arresto dell'attività cardiaca applicando la legatura nell'àmbito degli atrî). Il Luciani vide inoltre che, se si riempie la cannula di siero fresco di coniglio o di pecora, e si esercita con esso nell'interno del cuore una certa pressione, questo ricomincia a pulsare con forza, qualunque sia il punto della legatura. Applicò il metodo grafico per poter meglio studiare il decorso dell'attività cardiaca in queste condizioni, e potè così ottenere i tracciati di tre distinti fenomeni caratteristici, che sono la manifestazione di tre diverse fasi dell'attività cardiaca prima del suo esaurimento (fenomeno dell'accesso, fenomeno del ritmo periodico e fenomeno della crisi).

Da queste osservazioni egli trasse importanti conclusiosi teoriche sulla natura dell'attività automatica cardiaca e che, in seguito, estese anche alla natura dell'attività automatica dei centri respiratorî, studiando il ritmo periodico (fenomeno di Cheyne e Stokes).

Tornato in patria, lo vediamo dapprima dedicarsi a ricerche di fisiopatologia. Dopo aver tenuto per due anni (1873-74) l'insegnamento (per incarico) di un corso straordinario di patologia sperimentale all'Università di Bologna, passò nel '75 a quella di Parma quale professore straordinario della stessa materia.

Il periodo del soggiorno a Parma (1875-80) fu un periodo di difficoltà e di dolore. In un laboratorio privo di ogni mezzo, contrariato da una spiacevole polemica, mossagli da due illustri scienziati di Torino, sull'attività diastolica, riuscì a *fortificarsi col lavoro*, aiutato dall'amico e collega Tamburini, il quale gli accordò ospitalità e mezzi di studio nel manicomio di Reggio. Frutto di questo periodo furono i classici studî sulle localizzazioni cerebrali, studii che egli compì insieme col Tamburini e col Seppilli, dimostrando tra l'altro, che le aree eccitabili del cane si estendono anche alla porzione di corteccia introflessa del solco crociato e reagiscono agli stimoli meccanici. Ma specialmente a lui si deve la dottrina della patogenesi corticale dell'epilessia (1878). Non meno importanti sono i risultati ottenuti dagli esperimenti di estirpazione delle varie regioni corticali connesse con le funzioni sensoriali. Per l'analisi funzionale di questi centri utilizzò acconciamente i risultati delle osservazioni cliniche ed anatomo-patologiche.

Ancora uno dei soggetti fondamentali, a cui giunse in base alle sue ricerche ed osservazioni cliniche, merita ricordo, essendo stato più tardi ampiamente confermato: quello che si può definire « della natura mista sensitiva e motrice della zona eccitabile corticale ».

Nel 1880, giunto a coprire la cattedra di fisiologia a Siena, quarantenne, vide finalmente coronata dal successo la sua più viva aspirazione. Seguì, dopo due anni, il periodo fiorentino (1882-93) in cui iniziò e portò a termine i suoi studi sperimentali più importanti: quello sulla *fisiologia del digiuno* (1889) e l'altro sulla *fisiologia del cervelletto* (1891).

Queste due monografie, divenute celebri nel campo degli studî nazionali e stranieri, non hanno soltanto il merito di contenere scoperte di fatti nuovi, basate su inoppugnabili osservazioni, logicamente interpretate, ma anche il non minor merito di essere condotte con profondo acume critico e coordinate in un saldo corpo dottrinale. Esse accoppiano al valore immanente di addure fatti nuovi, il pregio di poter essere assunte come modello per ogni altra ricerca fisiologica di argomenti diversi.

Questo periodo segna anche il fiorire della scuola: emulando il Ludwig e seguendo la sua naturale tendenza, cercò sempre di scegliere, tra i suoi allievi, i migliori, per incitarli, dirigerli ed entusiasmarli negli studî sperimentali di fisiologia.

Fu il periodo, come egli scrisse, dei migliori anni goduti « nella pace e tranquillità di quel vasto Istituto fisiologico, ove vivevo nascosto tutto il giorno, come un asceta, a pensare, a strologare, a lavorare sul vivo, a discutere, talora a leticare (sempre però col sorriso sulle labbra) con i miei giovani amici e collaboratori, mai di politica, ma di scienza sempre, che assai più eccitava la nostra mente e il nostro cuore, talora anche di arte e di letteratura che hanno parentele e colleganze con la scienza della vita maggiori di quelle che il volgo sa immaginare ».

La monografia sulla fisiologia del digiuno (studî sull'uomo) fu preceduta da un'altra sul decorso dell'inanizione, studiata sperimentalmente sugli animali (1882). Lo studio compiuto sul digiunatore Succi, che per 30 giorni si astenne dall'assumere cibi, è il primo studio fondamentale e completo sull'argomento. Coll'aiuto dei suoi allievi, indagò le modificazioni subìte dalle grandi funzioni (circolatoria, respiratoria, termica, cenestesica, ecc.), il consumo dei tessuti, il *deficit* giornaliero, lo scambio materiale e respiratorio. Questi dati, insieme con quelli delle sue precedenti ricerche sperimentali, utilizzò come base per formulare una dottrina generale dell'inanizione, che ancora oggi regge brillantemente alla critica [1], avendo le successive ricerche soltanto chiarito alcuni punti controversi. Basta ricordare che la sua monografia è servita di modello alla più ampia e recente monografia sull'argomento, quella del Benedict (912-1915) [2].

Il Luciani distinse, nel processo dell'inanizione, tre fasi o periodi: il breve periodo iniziale della *fame*, di durata e di intensità diversa, nei

[1] Cfr. A. Lipschütz, *Zur allg. Physiologie des Hungers*, Braunschweig Vieweg, 1915.

[2] F. G. Benedict, *A study of prolonged fasting*, Washington, 1915.

diversi individui, caratterizzato dal fatto che il consumo e le funzioni dell'organismo sono più o meno profondamente alterate, specialmente per effetto degli stimoli della fame; il lungo periodo di *inanizione fisiologica*, caratterizzato solo da una graduale diminuzione del consumo giornaliero e da una correlativa diminuzione della termogenesi; infine il periodo della *inanizione morbosa* o *crisi*, che precede la morte ed in cui si manifestano lieve aumento della temperatura, vomito, diarrea, collasso. È al secondo periodo, di inanizione fisiologica, che rivolse la maggiore attenzione, come al periodo più importante dal punto di vista della fisiologia generale. Vide che le grandi funzioni (termo-regolazione, regimi circolatorio e respiratorio, attività nerveo-muscolari, cenestesi) si conservano nei limiti delle normali oscillazioni. Tutte le secrezioni digestive sono sospese; mentre continuano normali le secrezioni degli emuntorii (dell'orina e del sudore, della bile e del mucco), diminuisce progressivamente la quantità dell'azoto, solfo e fosforo emessi coll'urina, mentre la quantità relativa del fosforo rispetto all'azoto progressivamente aumenta. Va sempre più scemando il consumo della propria carne; si mantiene quasi costante il consumo del proprio grasso finchè non sia prossima ad esaurirsene la provvista. Diminuisce la produzione e la dispersione del calore. Ha luogo una liquidazione di diverso grado dei diversi tessuti, compreso il tessuto osseo; gli eritrociti e il sistema nervoso la subiscono in grado minimo. Dal fatto che la curva della diminuzione del peso complessivo ha l'andatura di una iperbole equilatera, trae argomento per ammettere che la somma delle perdite che l'organismo subisce durante l'inedia sia in qualche modo regolata; il sistema regolatore è rappresentato dal sistema nervoso. Il quale per l'appunto è quella parte privilegiata dell'organismo che meno di tutte le altre si consuma per effetto dell'inedia protratta fino alla morte, perchè le sue perdite sono riparate a misura che si producono, a spese degli altri tessuti che si vanno liquidando grado a grado, come in una specie di lotta per l'esistenza, nella quale il sistema nervoso riesce trionfatore.

Non meno importanti sono altre dottrine che sotto la sua guida gli allievi poterono dimostrare. Ricordo la spiegazione che egli nel 1884 suggerì al Colzi circa gli effetti dell'estirpazione dell'apparecchio tiro-paratiroideo nei cani, che fossero cioè dovuti ad auto-intossicazione, per materiali tossici accumulatisi nell'animale operato, e che infatti vide scomparire dopo la trasfusione del sangue normale. Questa dottrina della patogenesi tireo-priva regge ancora oggi, più specialmente applicata agli effetti della paratiroidectomia.

La seconda serie di ricerche sperimentali del periodo fiorentino è quella dedicata alla fisiologia del cervelletto, frutto di sette anni di fecondo lavoro.

I meriti principali di questo celebre studio consistono specialmente nell'avere intraprese le sue ricerche sul cervelletto dei mammiferi superiori

(cani e scimmie, nei quali lo sviluppo dell'organo è maggiore e più prossimo a quello dell'uomo), raramente assunti fino allora a soggetti di indagine per le difficoltà tecniche dell'esperimentazione. Il Ferrier aveva giudicato *impossibile* di conservare in vita i mammiferi dopo la distruzione del cervelletto. Ma, in seguito alle pubblicazioni del Luciani, riconobbe di essersi ingannato, affermando che Luciani fu « *il primo*, con esperimenti abilmente ideati e bene eseguiti, a studiare per lunghi periodi di tempo i sintomi consecutivi alla completa o parziale estirpazione del cervelletto, negli animali più elevati, cioè cani e scimmie ».

Ciò egli dovè alla sua singolare perizia tecnica nelle operazioni chirurgiche e all'applicazione dei più scrupolosi mezzi asettici.

Il secondo merito consiste nell'avere accuratamente analizzato i complessi sintomi dovuti all'estirpazione, servendosi anche di tutti i più fini accorgimenti tecnici. Finalmente, un altro merito consiste nell'avere con profonda critica vagliato l'importanza dei varî fenomeni, utilizzandoli acconciamente per la formulazione di una dottrina unitaria completa e soddisfacente sulla funzione cerebellare che, come è noto, fu accolta quasi unanimemente e ancora oggi saldamente regge ad ogni critica.

Nel recentissimo studio di Gordon Holmes [1] su soldati inglesi, che nella guerra mondiale riportarono lesioni cerebellari, la dottrina del Luciani ha trovato, possiamo dire, una quasi completa ed assoluta conferma.

Chiamato ad unanimità dalla Facoltà medica di Roma a coprire la cattedra del Moleschott (1893), l'infelicità degli ambienti del nuovo Istituto, mancante delle comodità necessarie per certe ricerche, e la sua malferma salute, divenuta oscillante per lievi cagioni esterne (un catarro bronchiale ribelle ad ogni cura lo tormentò in tutti gli inverni dell'ultimo ventennio di sua vita) gli impedirono di continuare le ricerche sperimentali. Ma riparò mirabilmente, intraprendendo e portando a termine un'opera non meno importante: il suo classico trattato sulla *Fisiologia dell'uomo*, a cui dedicò tutte l'energie degli ultimi suoi venticinque anni di vita.

Il successo di quest'opera fu tale che, sebbene di vasta mole (cinque grossi volumi), si è sentito il bisogno, in Italia, di ripubblicarla in cinque edizioni successive; ed è stata tradotta nelle lingue spagnuola, tedesca ed inglese.

Tale successo è dovuto ai pregi dell'opera che forma un edifizio granitico ed armonico, in cui le parti non sono agglomerate, ma, per intima coesione, coordinate in un'opera unica inscindibile. Non arida esposizione di fatti e di pensieri singoli indipendenti slegati, *sicut membra disiecta*, ma armonica concatenazione di fenomeni e di concetti, uniti insieme da un le-

(1) Cfr. Gordon Holmes, *The symptoms of acute cerebellar injuries due to Gunshot injuries*: Brain, vol. X, 1917, pag. 461.

game comune, che, come un filo conduttore, li congiunge e li ordina. Perfetto riscontro all'organismo vivente, costituito da una molteplice compagine di organi con funzioni distinte, ma tutte cooperanti allo scopo comune del benessere del corpo e dello spirito.

Nella discussione dei singoli argomenti e delle diverse dottrine e ipotesi, subordina la loro soluzione a quella delle più ampie e più generali questioni della vita che, come i motivi tematici di un'opera musicale, richiamano alla mente analizzante la grande trama e l'ossatura fondamentale sintetica.

Un altro pregio consiste nell'aver trasformato la trattazione dottrinale di una scienza severa ed arida in un'opera artistica, che si legge con lo stesso interesse di una bella opera letteraria. La nostra lingua è usata con quella pulitezza e proprietà che purtroppo invano si cercano nei libri scientifici. Questa dote egli deve non solo alla sua educazione letteraria e classica dell'età giovanile, ma anche al soggiorno fiorentino.

Il sentimento patriottico ha però altre soddisfazioni nell'opera del Luciani: oltre quella di aver dato all'Italia un trattato, di cui si sentiva generalmente la mancanza, l'altra di aver messo in giusto rilievo l'opera, spesso ignorata, degli osservatori e pensatori italiani.

I meriti dell'insegnante vanno molto di là di quelli di un maestro dotato, come egli era, di parola calda, affascinatrice, sgorgante e avvalorata dalla maestosa e veneranda figura, nota a quanti medici e biologi, nelle Università ove insegnò, ebbero la ventura di udirlo parlare dalla cattedra. Questi meriti sono effettivamente moltiplicati se si pensa alla falange di studiosi italiani e stranieri che attingono alla miniera di nozioni del suo trattato.

Egli, così, validamente contribuisce ad elevare la cultura biologica e medica delle viventi generazioni di professionisti. Tanto nelle ricerche sperimentali, quanto nell'insegnamento, fu ispirato dal concetto fondamentale (da lui ripetutamente espresso) di addestrare i medici a pensare fisiologicamente, convinto della unità della scienza medica in generale e della inseparabilità della fisiologia dalla patologia in ispecie.

Nè la sua opera si limitò a questo. Conscio che alla fisiologia spetta un còmpito ancor più grave (raccogliendo essa nelle sue varie branche di biochimica e di biofisica, teorica ed applicata, il vastissimo campo della scienza della vita, studiato con i metodi sperimentali obiettivi ed introspettivi), si occupò di argomenti di fisiologia generale, di fisiologia comparata, di fisiologia del linguaggio e di fisio-psicologia. Le sue prolusioni (evoluzione storica dei principî; i preludii della vita; la fisiologia e la scienza sociale; lo svolgimento storico della fisiologia), le sue ricerche sperimentali sui bachi da seta, gli studî di fonetica sperimentale, dimostrano il suo interessamento ai più svariati problemi della fisiologia.

Aperta la mente dall'età più giovine ai problemi ed al culto della fisiologia, Luigi Luciani si mantenne filosofo nel senso etimologico più bello e moderno della parola. Amante della scienza, della sua scienza.

Dotato di vivissimo intelletto, di singolare perizia tecnica che gli permetteva di compiere le più audaci operazioni chirurgiche sulle parti meno accessibili dei centri nervosi, dotato di instancabile attività, avrebbe potuto, solo se avesse voluto dedicare parte della sua giornata alla pratica professione, con la più grande facilità raggiungere cospicua posizione economica. Ma non volle. Era attratto, irrestibilmente attratto solo dalle pure soddisfazioni ideali della sua scienza. Non è mio merito, diceva, non fo altro che seguire fedelmente i miei istinti.

Ma noi, alla sua scomparsa, dobbiamo celebrare e benedire e augurare che uomini con siffatti istinti nascano e prosperino nella maggior copia possibile. Non folli, come li direbbe quasi il volgo profano, ma eroi del pensiero e dell'intelletto; sempre più rari, quasi leggendarî, in tanto dilagare di materiali egoismi.

PUBBLICAZIONI SCENTIFICHE

IN ORDINE CRONOLOGICO.

1. *Del plasticismo organico comparativo*, pag. 68. Con una presentazione di Giovanni Franceschi (Fano, pei tipi di Giovanni Lana, 1864).
2. *Analisi fisiopatologica del tetano.* Dissertazione per la laurea e libero esercizio medico-chirurgico (Rivista clinica di Bologna, 1868).
3. *Dell'uso del curaro contro il blefarospasmo e la fotofobia.* Considerazioni diagnostiche e terapeutiche (ibid., 1869).
4. *Un caso di embolie delle arterie centrali delle retine.* Processo diagnostico (Ibid. 1869).
5. *Della cura successiva alla strabotomia.* (Ibid., 1869).
6. *Dei tessuti e degli organi erettili.* Rivista anatomo-fisiologica (ibid., 1869).
7. *Dell'attività della diastole cardiaca.*, rilevata dai suoi effetti e dalle potenze nerveo-muscolari che la promuovono. Studî critico-sperimentali (ibid., 1871).
8. *Dell'attività della diastole cardiaca.* Risposta ad una rivista critica del prof. Lemoigne (Annali universali di medicina, nov. 1871).
9. *Dei fenomeni cardiaco-vascolari della febbre e della infiammazione.* Rivista (ibid., 1872).
10. *Eine periodische Function des isolirten Froscherzens* (Berichte der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1873).
11. *Sulla fisiologia degli organi centrali del cuore.* Indagini sperimentali sulle rane fatte nell'Istituto fisiologico di Lipsia (Rivista clinica di Bologna, 1873).
12. *Morbi simpliciores.* Prelezione al corso di fisiologia patologica (Ibid., 1874).
13. *Sulla dottrina dell'attività diastolica.* Rivista fisio-patologica (ibid., 1874).
14. *Nuovo metodo per la trasfusione diretta del sangue da animale ad uomo* (ibid., 1874).
15. *Sulla natura funzionale del centro respiratorio.* Ricerche sperimentali in collaborazione con G. Pratilli (ibid., 1874).
16. *Nutrizione.* (Ch. fisiologica). Articolo inserito nella Enciclopedia chimica del Selmi (Anno 1874).

17. *Osmosi.* (Fisica fisiologica). Articolo (Ibid., 1874).
18. *Le prime questioni patologiche.* Prelezioni al corso di patologia generale nella R. Università di Parma (1875).
19. *Sulla evoluzione storica dei principî.* Discorso inaugurale per la riapertura della Università di Parma (1875-1876).
20. *Risposta alla critica sperimentale dell'attività diastolica dei dottori Mosso e Pagliani* (Rivista clinica di Bologna, 1876).
21. *Delle oscillazioni della pressione intratoracica e intraddominale.* Studio sperimentale (Archivio per le scienze mediche, anno 2°, fasc. 2° e 3°, Torino 1877).
22. *Sui centri psico-motorî corticali.* Ricerche sperimentali (in collaborazione con A. Tamburini) (Rivista sperimentale di freniatria e di medicina legale, Reggio Emilia 1878).
23. *Sulla patogenesi della epilessia.* Studio critico sperimentale (ibid., anno 4°, 1878).
24. *Sui centri psico-sensorii corticali.* Ricerche sperimentali (in collaborazione con A. Tamburini) (ibid., 1879, e Rend. R. Istituto Lombardo, sez. 2ª, vol. 12).
25. *Idem.* Comunicazione preventiva letta al R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 16 gennaio (Milano, 1879).
26. *Studî clinici sui centri sensorii corticali.* Comunicazione preventiva (in collaborazione con A. Tamburini (Annali universali di medicina e chirurgia, vol. 247, Milano 1879).
27. *Del fenomeno di Cheyne e Stokes, in ordine alla dottrina del ritmo respiratorio.* Studio critico sperimentale (Lo Sperimentale, Firenze 1879).
28. *I centri psico-motorii della corteccia cerebrale della scimmia.* Dimostrazione sperimentale (Archivio italiano per le malattie nervose, fasc. 1°, anno 1881).
29. *La fisiologia del sistema nervoso nelle sue relazioni coi fatti psichici del prof. M. Panizza.* Roma, 1880. (Rivista sperimentale di feniatria e di medicina legale; anno VII, 1881, fasc. I-II).
30. *La fisiologia e la scienza sociale.* Discorso inaugurale di riapertura della R. Università di Siena, nell'anno accademico 1880-81. (Siena, Tipografia Sordomuti, 1880).
31. *A proposito della riproduzione della milza.* (Spallanzani: Rivista di scienze mediche e naturali, fasc. IX-X, anno X, serie 2°. Modena, tipi Vincenzi, 1881).
32. *Sul decorso dell'inanizione.* Ricerche sperimentali (in collaborazione con G. Bufalini) (Arch. per le scienze mediche, V. 1882. 338-365).
33. *Sull'eccitamento meccanico dei centri motori corticali.* (Milano, tipografia Rechiedei, 1884. Atti del 4° Congresso freniatrico italiano, Voghera, sett. 1883).
34. *Linee generali della fisiologia del cervelletto.* Prima Memoria (Firenze, 1884, pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori).
35. *On the sensorial localisations on the cortex cerebri* (Brain, XXVI, 1884).
36. *Sulla vita latente degli ovuli del baco da seta durante l'ibernazione.* Ricerche sperimentali (Bullettino della Società entomologica italiana; anno XVII, Firenze, tipografia Cenniniana, 1885).
37. *Ancora sulla ibernazione degli ovuli del baco da seta.* Risposta alle note e appunti del prof. Verson (Bullettino società entomologica italiana; anno XVII, Firenze, 1885).
38. *Le localizzazioni funzionali del cervello.* Monografia premiata dal R. Istituto Lombardo di scienze e lettere (in collaborazione col Seppilli) (Napoli, 1885, L. Vallardi).
39. *Relazione al sopraintendente del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze sulle visite fatte in Parigi allo stabilimento Pasteur, per la cura preventiva della rabbia* (Firenze, coi tipi dei successori Le Monnier, 1886).
40. *Sui fenomeni respiratorii delle uova del bombice del gelso.* Nuove ricerche sperimentali (in collaborazione col Piutti) (Firenze, 1888, Bullettino della Società entomologica italiana).

41. *Fisiologia del digiuno: studî sull'uomo.* Pubblicazioni del R. Istituto di studî superiori (Firenze, 1889, pag. 1-157). Traduzione tedesca (Hamburg und Leipzig, 1890. Verlag von Leopold Voss.).

42. *Il cervelletto: nuovi studi di fisiologia normale e patologica* (Firenze, 1891. Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori). Traduzione tedesca (Leipzig, 1893. Verlag von Ed. Besold, Arthur Georgi).

43. *Nota critica alla memoria dei dottori Gallerani e Borgherini « sezione mediana antero-posteriore del verme del cervelletto » contributo allo studio della fisiologia del cervelletto »* (Rivista sperimentale di freniatria e medicina legale, vol. 18, an. 1892).

44. *I preludii della vita.* Discorso inaugurale (Firenze, 1893. Annuario del R. Istituto di studi superiori; Biol. Centralbl. 13, an. 1893).

45. *Sui fenomeni respiratorii della crisalide del bombice del gelso.* Ricerche preliminari (in collaborazione col Lo Monaco) (1893, Atti della R. Accademia dei Georgofili, vol. XVI).

46. *Lo svolgimento storico della fisiologia.* Prelezione al primo corso di fisiologia nella R. Università di Roma (Torino, 1894, Ermanno Loescher, editore).

47. *De l'influence qu'exercent les mutilations cérébelleuses sur l'excitabilité de l'écorce cérébrale et sur les réflexs spinaux.* (Communication faite au Congrès international de biologie, tomo XXI, 1894).

48. *Giulio Ceradini* (Bullettino della R. Accademia medica di Roma, anno XXI, fasc. 1°, 1894-95; Arch. ital. de biol., tomo XXII, 1894; ibid., tome XXIII, 1895; Die Natur, 44 Jahrgang. an. 1895, n. 30).

49. *Carlo Ludwig* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. IV, 1895; Die Natur, 44 Jahrgang, an. 1895, n. 24).

50. *I recenti studi sulla fisiologia del cervelletto, secondo il prof. David Ferrier.* Rettificazioni e repliche (Rivista sperimentale di freniatria e di medicina legale, 1895, vol. XXI; Archives italiennes de biologie, 1895, tome XXIII; Biologisches Centralblatt. B. XV, an. 1895).

51. *Il peso dei bozzoli del bombice del gelso dall'inizio della loro tessitura alla nascita delle farfalle* (in collaborazione con Luigi Tarulli) (Atti della R. Accademia dei Georgofili, vol. 18, an. 1895).

52. *Sui fenomeni respiratorii delle larve del bombice del gelso.* Ricerche sperimentali (in collaborazione con Lo Monaco) (Atti della R. Accademia dei Georgofili, serie 4ª, vol. XVIII, an. 1895; Archiv. ital. de biolog. XIII, 1895).

53. *Luigi Pasteur* (Il Policlinino, 1895),

54. *Comunicazioni al II° Congresso nazionale di bacologia e sericoltura* (Torino, tipografia G. De Rossi, 1895).

55. *Alcune ricerche comparative sulle principali acque clorurate di Montecatini* (in collaborazione coi dott. U. Dutto e D. Lo Monaco) (Rend. R. Accad. Lincei, Classe scienze fisiche e naturali, vol. II, 2ª serie, 1895, pag. 81-93).

56. *L'accrescimento progressivo in peso ed in azoto della larva del bombice del gelso in ordine all'alimentazione occorrente nelle successive età* (in collaborazione col Lo Monaco) (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. VI, 1° semestre, 1897; Arch. ital. de biol., *27*, an. 1897, pag. 340).

57. *Dei mezzi di sterilizzazione delle bigattiere.* Ricerche sperimentali (in collaborazione con Luigi Tarulli) (Atti della R. Accademia dei Georgofili, vol. 20, an. 1897).

58. *Fisiologia dell'uomo* (Milano, Società editrice libraria, 1ª e 2ª edizione, volumi quattro, 1901-1911; 3ª e 4ª edizione, volumi cinque, 1908-1913; 5ª edizione, vol. 3°, 1919. Traduzione spagnola, Virgili, Barcellona, 1905-1911; traduzione tedesca, E. Fischer, Jena, 1905-1911; traduzione inglese, Macmillan, London 1911-1917).

59. *Giuseppe Colasanti* (Archivio di farmacologia sperimentale e scienze affini, anno II, vol. II, fasc. II, 1903; Arch. ital. de biol, 39, an. 1903. pag 493-500).
60. *Sulla genesi delle sensazioni della fame e della sete* (Arch. de fisiol., III, 1906, pag. 541-546).
61. *Vittorio Marchi* (Archives italiennes de biologie, 1908, tome 49, pag. 149-152; Folia neurobiologica, Band I, 1908).
62. *Per Angelo Mosso*. Parole pronunciate nella tornata del senato del 5 dicembre 1910 (Roma, Forzani e C., tipografi del senato, 1910).
63. *Per la riforma ortografica*. (Atti della società italiana per il progresso delle scienze 4ª riunione. Napoli, 1910).
64. *Di una riforma ortografica basata sulla fonetica fisiologica* (Rivista pedagogica, anno 4°, I, fasc. III, 1910),
65. *In occasione della legge per la fondazione dei ginnasi-licei moderni* (Senato del Regno; tornata del 13 luglio 1911).
66. *Angelo Camillo De Meis* (Bollettino delle scienze mediche, anno LXXXIII, ser. III, vol. XII, Bologna 1912).
67. *Ancora sulla sfera visiva del mantello cerebrale dei cani*. (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXI, 2ª serie, 1912, pag. 487-493. Livre jubil. de Ch. Richet, 1912, pag. 273).
68. *La questione del nuoto e del cammino in ordine alla dottrina del cervelletto*. Risposta al prof. Murri (Archivio di fisiologia, vol. XIV fasc. II, gennaio, 1916).

OPERE PUBBLICATE IN OCCASIONE DI GIUBILEI.

Ricerche di fisiologia e scienze affini. Dedicate in occasione del XXV anno del suo insegnamento (volume di pag. 418, Milano 1900).
Ricerche eseguite nello istituto di farmacologia sperimentale e di chimica fisiologica, diretto da G. Colasanti (vol. V, dedicate nella stessa occasione, Roma, 1900).
Le onoranze a Luigi Luciani; 3 maggio 1900 (Nuova Antologia del 1° giugno 1900: Ascoli Piceno, 29 aprile 1900).
Onoranze a Luigi Luciani, in occasione del completamento della 4ª edizione della « Fisiologia umana » (21 giugno 1913).

Il Presidente Ròiti dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Pierandrea Saccardo, avvenuta il 12 febbraio 1920; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Botanica*, sino dal 15 luglio 1904. Comunica inoltre la perdita del Socio straniero prof. Geronimo Giorgio Zeuthen, mancato ai vivi il 6 gennaio 1920; faceva parte il defunto dell'Accademia, per la *Matematica*, sino dal 21 luglio 1902.

Il Socio Castelnuovo ricorda gli importanti lavori scientifici dello Zeuthen, colle seguenti parole:

« Lo Zeuthen seppe riempire la lunga vita con instancabile operosità. I suoi primi lavori risalgono al 1859, l'ultimo è di pochi mesi or sono. E son tutti lavori di alto pregio. A lui dobbiamo, nella geometria algebrica, risultati fondamentali concernenti in modo speciale la teoria delle corrispondenze, la forma di curve e superficie dei primi ordini, la geometria numerativa, alla quale dedicò un trattato uscito sei anni fa. Ma il campo di ri-

cerche, che rese noto il suo nome ad un pubblico più largo, riguarda la storia della matematica. Egli pubblicò un aureo volumetto sulla matematica nell'antica Grecia e nel medio evo, e con numerose Memorie preparò e portò complementi a questo libro. Notevoli soprattutto le acute indagini su quel periodo così interessante e poco noto che va dal 500 al 300 av. Cr., nel quale la mirabile unione del genio inventivo e dello spirito critico dei Greci creò la scienza razionale. I lavori dello Zeuthen, sempre geniali e profondi, ci portano qualche luce sulle fonti degli *Elementi* di Euclide.

« Alla memoria di questo scienziato eminente, che amava l'Italia ed era legato da vincoli di amicizia coi nostri maggiori matematici, io mando, sicuro di interpretare il pensiero dei colleghi, un reverente saluto ».

Il Socio Pirotta pronuncia affettuose parole in ricordo del compianto prof. Saccardo, che sarà specialmente commemorato in una delle prossime sedute, ricordandone i meriti scientifici e la costante opera dedicata all'insegnamento.

Il Presidente comunica una lettera del Socio straniero Lallemand, il quale presenta all'Accademia le sue più vive condoglianze per la recente e dolorosa perdita dei Soci Millosevich e Reina.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste le seguenti dei Soci: Viola, *Trattato di cristallografia*; Silvestri, *Descrizione e notizie del Ceroplastes sinensis* D. Guerc. (*Hemiptera, Coccidae*); Millosevich F., *Giacimenti italiani di minerali accessori per la siderurgia*. Fa inoltre menzione della pubblicazione del principe Bonaparte: *Notes ptéridologiques*, VII; e del volume del dott. X. Raspail: *Raspail et Pasteur. Trente ans de critiques médicales et scientifiques; 1884-1914*.

Il Socio Volterra presenta una Nota a stampa di cui il prof. Lebon fa omaggio all'Accademia, e che contiene la prefazione alla ristampa delle tavole dei numeri primi e della decomposizione dei numeri da 1 a 10 mila, del P. Giovanni Inghirami.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Luzzatti, invitato a parlare con deferenti espressioni dal Presidente, fa una importante comunicazione intrattenendo la Classe degli studî del prof. Girolamo Azzi, libero docente di geografia fisica alla Università di Roma e appartenente all'Istituto internazionale d'agricoltura. L'on. Luzzatti si diffonde su questi studî che riguardano la soluzione di fondamentali pro-

blemi di meteorologia agraria; parla inoltre dell'organizzazione che l'Azzi ha saputo istituire su larghe e lontane plaghe della terra allo scopo di esaminare per ora lo sviluppo del frumento ed i fattori da cui siffatto sviluppo viene a dipendere. Il Socio Luzzatti conclude il proprio discorso coll'invitare l'Accademia a dare un giudizio su queste indagini del prof. Azzi, che tanto interesse presentano per la scienza e per l'economia mondiale.

Il Socio Pirotta conferma le dichiarazioni dell'on. Luzzatti ed elogia gli studî dell'Azzi, dimostrandone, con varî particolari, il valore che hanno nel campo scientifico e pratico.

In seguito alla proposta del Socio Fano, di stabilire il miglior modo con cui l'Accademia possa giudicare l'importanza delle ricerche dell'Azzi ed aiutarne l'opera, sorge una elevata discussione nella quale intervengono il Presidente Ròiti, e i Soci Volterra, Paternò e Grassi; e la Classe delibera all'unanimità che una Commissione composta dei Soci Luzzatti, Pirotta e De Marchi riferisca sollecitamente, con proposte d'indole pratica, a favore di una così nobile iniziativa della scienza italiana.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 marzo 1920.

Azzi. G. — Climatologia e fitogeografia (Estr. dalla « Rivista meteorico-agraria », anno XXXVI). Roma, 1915 8°, pp. 1-39.

Azzi G. — Il problema meteorico agrario (Estr. da « Bollettino del Ministero di agricoltura, industria e commercio », serie *B*) Roma, 1916. 8°, pp. 1-10.

Azzi G. — Il raggruppamento degli elementi biologici e la biogeografia (Estr. dagli « Atti del X Congresso internazionale di geografia »). Roma, 1915. 8°, pp. 1-5.

Azzi G. — L'organizzazione del servizio meteorico agrario (Estr. dal « Bollettino della unione delle cattedre ambulanti di agricoltura italiane »). Roma, 1919. 8°, pp. 1-11.

Azzi G. — Le piogge e gli anelli del legno (Estr. dal « Bollettino della Società meteorologica italiana », anno 1917). Torino, 1919. 8°, pp. 1-7.

Azzi G. — Le stagioni fenologiche in Italia (Estr. dalla « Rivista meteorico-agraria », anno XXXV). Roma, 1914. 8°, pp. 1-23.

Azzi G. — Le stagioni fenologiche nella penisola Scandinava (Estr. dal « Bollettino della Reale Società geografica italiana »). Roma, 1919. 8°, pp. 1-22.

Azzi G. — Per la organizzazione di un servizio di meteorologia agraria (Estr. dalla « Rivista meteorico-agraria », anni XXXIII e XXXVII). Roma, 1912, 8°, pp. 1-72; 1917, pp. 1-66.

Azzi G. — Quadro fenologico della Bulgaria (Estr. dal « Bollettino della Reale Società geografica italiana »). Roma, 1918. 8°, pp. 1-19.

Azzi G. — The problem of agricoltural meteorology (repr. from the « Monthly Bulletin of agricultural intelligence and plant diseases », year IX). Rome, 1918. 8°, pp. 1-14.

Bailey S. I. — Oliver Clinton Weudell (1845-1912) (Reprint from the « Proceedings of the american Academy of arts and sciences », vol. LIII, pp. 875-876). Boston. 8°.

Bonaparte (le prince). — Notes ptéridologiques, fasc. VIII. Paris, 1919. 8°, pp. 1-197.

Figari F. — Prove di metalli col metodo dell'impronta in relazione agli altri normali metodi diretti. Torino, 1920. 8°, pp. I-XVI, 1-221.

Heynix A. — Essai d'olfatique physiologiqne. Bruxelles, 1919. 4°, pp. 1-289.

Lebon E. — P. Giovanni Inghirami de l'ordre « delle scuole pie ». Paris, 1919. 8°.

Millosevich F. — Giacimenti italiani di minerali accessorii per la siderurgia (Estr. dagli « Atti della Società italiana per il progresso delle scienze »). Roma, 1919. 8°, pp. 1-20.

Musemeci Grasso F. — A quale cura devono essere sottoposti i sifilitici per potere guarire. Roma, 1919. 8°, pp. 1-15.

Passerini N. — Anormale accrescimento dell'innesto in confronto del soggetto in alcuni mandorli coltivati. S. l. e d.

Passerini N. — Contributo allo studio della composizione immediata delle cariossidi di granturco (Estr. dal « Bollettino della Società italiana per lo studio della alimentazione », vol. I, pp 17-22). Firenze, 1919. 8°.

Passerini N. — Di alcune esperienze su la conservazione delle uova (Estr. dal « Bollettino della società italiana per lo studio della alimentazione », vol. I, pp. 22-30). Firenze, 1919. 8°.

Passerini N. — Di un caso di saldatura

del tronco di una « quercus ilex L. » con quello di una « quercus robur l ». S. l. e d.

PASSERINI N. — Sul potere insetticida « Pyrethrum cinerariaefolium Trev. » coltivato a Firenze, in confronto con quello di alcune altre asteracee (Estr. dal « Nuovo giornale botanico italiano », vol. XXVI, pp. 30-45). Firenze, 1919. 8°.

PASSERINI N. — Sulla necessità della valutazione quantitativa del carbonato calcare per determinare la natura dei terreni (Estr. dal « Bullettino della Società botanica italiana »). Firenze, 1917. 8°, pp. 1-3.

PASSERINI N. — Influenza di alte temperature sopra la vitalità dei semi di « Trachycarpus excelsa H. Weude ». S. l. e d.

PASSERINI. N. — Valutazione della composizione azotata nei foraggi (Extr. dagli « Annali di chimica applicata », vol. VI, pp. 162-164). Roma, 1919. 8°.

RABBENO G. — I moderni apparati motori termo-elettrici per la propulsione delle navi (Estr. dal giornale « l'Elettrotecnicà »). Milano, 1919. 4°, pp. 1-17.

RASPAIL. — Trente ans de critiques médicales et scientifiques, 1884-1914. Paris, 1916. 8°, pp. I-XVI, 1-527.

SILVESTRI F. — Descrizione e notizie del « Ceroplastes simensis D. Guere » Hemiptera, Coccidae) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. scuola superiore di agricoltura in Portici », vol. XIV). Portici, 1920. 8°, pp. 1-17.

VIOLA C. — Trattato di cristallografia. Milano, 1920. 8°, pp. I-XV, 1-389.